Poincaré, H.

Sur les équations de Ia physique mathématique. (French) JFM 25.1526.01

Palermo Rend. VIII, 57-156 (1894).

Die Abhandlung, deren Inhalt sich vielfach mit dem einer früheren Arbeit des Verf. (cfr. F. d. M. XXII. 1890. 977, JFM 22.0977.03); sowie mit dem von Arbeiten der Herren H. A. Schwarz, C. Neumann, Picard berührt, hat den Zweck, gewisse Untersuchungen der Potentialtheorie auf die allgemeinere Gleichung

$$\Delta v + \xi v + f = 0 \tag{1}$$

zu übertragen, in der ξ eine Constante ist, f eine gegebene Function der Coordinaten. Das an diese Gleichung geknüpfte Problem ist das folgende: Man soll eine Function v bestimmen, die im Innern eines beliebig gegebenen zwei- oder dreidimensionalen Gebietes D der Gleichung (1) genügt, die ferner nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen innerhalb D continuirlich ist, und die endlich an der Grenze F von D die Bedingung

$$\frac{dv}{dn} + bv = 0 \tag{2}$$

erfüllt, wo b ebenfalls eine gegebene Constante ist. Auf diese Aufgabe wird man durch die Fourier'sche Gleichung für die Wärmeleitung geführt, wenn man ein Integral dieser Gleichung von der Form ve^{-at} sucht, wo v von t unabhängig ist. Das Glied f repräsentirt die Wirkung von Wärmequellen im Innern des betrachteten Gebiets. Uebrigens umfasst die genannte Aufgabe auch viele andere Aufgaben der mathematischen Physik als specielle Fälle; von besonderer Wichtigkeit sind die Fälle $\xi = 0$, $f = 0$, $b = 0$, $b = \infty$.

Im ersten Teile der Abhandlung wird nur der Fall $b = \infty$ untersucht. Es handelt sich also darum, das Integral von (1) zu finden, das an der Grenze von D verschwindet zu dem Zwecke wird v nach dem Vorgange von Schwarz [Ueber ein die Flächen kleinsten Inhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung, cf. F. d. M. XVII. 1885. 776, JFM 17.0776.02] in eine nach Potenzen von ξ fortschreitende Reihe entwickelt:

$$v = [f, \xi] = v_0 + v_1\xi + v_2\xi^2 + \cdots . \tag{3}$$

Die Coefficienten v_0, v_1, ... lassen sich successive mittels der Green'schen Function für das Gebiet D bestimmen und der von Schwarz betreffs des Integrals

$$W_{mn} = \int v_m v_n d\tau$$

($d\tau$ ist das Volumenelement von D resp., falls D zweidimensional ist, das Flächenelement) aufgestellten Hülfssätze ermöglichen es, eine Grenze zu bestimmen, innerhalb deren der absolute Wert von ξ bleiben muss, damit die Reihe (3) gleichförmig convergirt. Zugleich convergirt auch die Reihe für $\frac{dv}{dx}$.

Weiter wird gezeigt, dass, wenn man an Stelle der Function f die folgende einführt:

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_p f_p,$$

wo f_1, f_2, ..., f_p gegebene Functionen, α_1, α_2, ..., α_p verfügbare Constanten bezeichnen, über letztere so verfügt werden kann, dass

$$P = D_1.v$$

eine nach Potenzen von ξ fortschreitende Reihe ist, die der Gleichung

$$\Delta P + \xi P + f D_1 = 0 \tag{4}$$

genügt und für beliebig grosse, daher schliesslich, falls p sehr gross, für alle Werte von ξ convergirt. D_1 ist dabei folgende, von x, y, z unabhängige Function von ξ:

$$D_1 = \alpha_p - \xi\alpha_{p-1} + \xi^2\alpha_{p-2} - \cdots + (-1)^{p-1}\alpha_1. \tag{5}$$

Die Function

$$v = \frac{P}{D_1}$$

ist dann also in der ganzen Ebene ξ meromorph. Die Ableitung dieses Resultats stützt sich auf folgende Hülfssätze: a) Ist V irgend eine Function von x, y, z im Gebiete D, ist ferner

$$A = \int V^2 d\tau, \quad B = \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau,$$

so ist $\frac{B}{A} > \frac{16}{9l^2}$, falls l die grösste Dimension des dreidimensionalen Integrationsgebietes ist. Ist das Integrationsgebiet zweidimensional, so ist $\frac{B}{A} > \frac{24}{7l^2}$.

b) Setzt man

$$V = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_p\varphi_p,$$

wo φ_1, ..., φ_p gegebene Functionen sind, so kann man die Constanten α stets so wählen, dass $\frac{B}{A}$ grösser ist als eine Zahl L_p, die nur von dem Gebiete D und der Zahl p abhängt, und die mit p unbeschränkt wächst, und zwar wie $p^{\frac{2}{3}}$ im dreidimensionalen, wie p^1 im zweidimensionalen Gebiet.

Nimmt man in Gleichung (4) für ξ eine Wurzel der Gleichung $D_1 = 0$, die mit $\xi = k$ bezeichnet werde, so ergiebt sich eine Function P_k, die der Gleichung

$$\Delta P_k + k.P_k = 0$$

genügt und an der Grenze des betrachteten Gebiets verschwindet. P_k wird als harmonische Function bezeichnet, die Zahl k als ihre Charakteristik. Dann gilt der Satz: Die meromorphe Function v (cf. oben) hat nur einfache Pole, deren Residuen die harmonischen Functionen sind. Insbesondere werden solche harmonischen Functionen betrachtet, die ausser den vorher genannten Eigenschaften noch die besitzen, dass

$$\int P_k^2 d\tau = 1$$

wird; und diese, die auch weiterhin eine wichtige Rolle spielen, werden mit U_i bezeichnet.

Der zweite Teil der Arbeit behandelt den Fall, dass b einen endlichen Wert hat. Zunächst werden für eine Function v, die im Innern des betrachteten Gebiets der Gleichung

$$\Delta v + f = 0, \tag{1a}$$

an der Grenze der Bedingung

$$\frac{dv}{dn} + bv = \varphi \tag{2a}$$

genügt, gewisse Ungleichungen abgeleitet, wie z. B., dass für $b > 0$, $\varphi > 0$, $f > 0$ auch v stets positiv ist. Ferner wird gezeigt, dass, wenn u eine beliebige Function ist, die nur nebst ihren ersten Derivirten stetig ist, die Bedingung (2a) durch folgende andere ersetzt werden kann:

$$\int uf d\tau + \int v\Delta du\tau + \int u\varphi d\omega = \int v\left(bu + \frac{du}{dn}\right) d\omega, \tag{2a}$$

wo $d\tau$ ein Volumenelement, $d\omega$ ein Oberflächenelement des betrachteten Gebiets bezeichnet. — Sodann, wird die verallgemeinerte Green'sche Function eingeführt, die im Innern unsres Gebietes der Gleichung

$$\Delta G + \xi G = 0$$

genügt, die neben ihren Ableitungen dort überall continuirlich und endlich ist, ausgenommen in unmittelbarer Nähe des Punktes P, wo $G - \frac{1}{4\pi r}$ (r die Entfernung von P) nebst der Ableitungen endlich und continuirlich ist, und die endlich an der Grenze des Gebiets der Gleichung

$$\frac{dG}{dn} + bG = 0 \tag{2}$$

genügt. Diese Function G besitzt folgende Fundamentaleigenschaft: Ist u eine innerhalb des betrachteten

Gebiets continuirliche Function, die dort der Gleichung

$$\Delta u - \xi u = f$$

genügt, während an der Grenze

$$\frac{du}{dn} + bu = \varphi$$

ist (f und φ sind gegebene Functionen der Coordinaten), dann ist der Wert u', den u im Punkte P, dem Pol der Green'schen Function, annimmt:

$$u' = \int G\varphi d\omega - \int Gf d\tau.$$

Nachdem noch die Grenzen bestimmt sind, zwischen denen G liegt, wendet sich der Verfasser dem Problem des stationären Temperaturzustandes zu, d. h. der Lösung der Gleichung (1) für den Fall $\xi = 0$, während in der Grenzbedingung (2) b endlich ist. Entwickelt man v in eine nach Potenzen von b fortschreitende Reihe:

$$v = v_0 + bv_1 + b^2 v_2 + \cdots, \tag{6}$$

so erhält man für die einzelnen Glieder der Reihe die Bedingung, dass im Innern

$$\Delta v_0 + f = 0, \quad \Delta v_1 = 0, \quad \Delta v_2 = 0, \quad \dots,$$

an der Grenze

$$\frac{dv_0}{dn} = 0, \quad \frac{dv_1}{dn} + v_0 = 0, \quad \frac{dv_2}{dn} + v_1 = 0, \quad \dots$$

wird. Und nun gelingt, es mittels der Neumann'schen Methode (vgl. C. Neumann: Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential, Leipzig 1877, JFM 09.0689.02), für ein convexes Gebiet die einzelnen Functionen v_0, v_1, ... zu bestimmen, wie auch die gleichmässige Convergenz der Reihe (6) für solche b, die unterhalb einer gewissen Grenze liegen, nachzuweisen. Während aber die Reihe (6) in dem ganzen betrachteten Gebiete convergirt, sind die entsprechenden Reihen für $\frac{dv}{dx}$, $\frac{d^2v}{dx^2}$, ... nur im Innern des Gebiets convergent, nicht mehr an der Grenze. Es ist daher fraglich, ob $\frac{dv}{dn}$ an der Grenze einen Sinn hat ebenso daher, ob der Grenzbedingung (2) wirklich genügt ist. Nimmt man aber statt der Grenzbedingung (2) die sie ersetzende modificirte Grenzbedingung (2b), in der jetzt $\varphi = 0$ zu setzen ist, so kann man das Problem vollständig lösen; und durch analytische Fortsetzung kann man die Lösung auf beliebige Werte von b übertragen. Dagegen reicht die Neumann'sche Methode nicht mehr aus, in derselben Weise das Problem des nicht stationären Temperaturzustandes zu behandeln, d. h. dasselbe Problem, wie vorher, nur dass in Gleichung (1) ξ nicht verschwindet. Entwickelt man nämlich v in eine nach Potenzen von ξ fortschreitende Reihe:

$$v = v^{(0)} + \xi v^{(1)} + \xi^2 v^{(2)} + \cdots, \tag{7}$$

so gelangt man zu einer Lösung nur, falls, man für die einzelnen Functionen $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, ... die Bedingung (2) durch die modificirte Bedingung (2b) ersetzt. Aber es gelingt nicht, zu beweisen, dass auch die Bedingung (2) erfüllt ist. Hier bleibt also eine Lücke, die der Verfässer vorläufig nicht auszufüllen vermag.

Der dritte Teil, in dem wieder die Bedingung $b = \infty$ eingeführt wird, ist der Entwickelung einer willkürlichen Function f nach den im ersten Teile definirten harmonischen Functionen U_i gewidmet. Die Frage, unter welchen Bedingungen die Darstellung von f durch die Reihe

$$f = \sum A_i U_i, \quad \text{wo } A_i = \int U_i f d\tau,$$

möglich ist, vermag Herr Poincaré noch nicht vollständig zu erledigen. Es gelingt ihm nur der Nachweis der folgenden Sätze: 1) Falls die Reihe

$$\sum A_i U_i$$

convergirt, stellt sie die Function f dar.

2) Die Function f kann in eine nach harmonischen Functionen fortschreitende Reihe entwickelt werden, falls sie eine analytische Function ist und an der Grenze verschwindet, ebenso wie Δf und $\Delta\Delta f$. — Hinsichtlich der Beweise müssen wir auf das Original verweisen.

Reviewer: Wangerin, Prof. (Halle a. S.)

Full Text: DOI