Kobb, G.
On the maxima and minima of double integrals. (Sur les maxima et les minima des intégrales doubles.) (French) JFM 24.0337.02
Acta Math. XVI, 65-140 (1892).

Das Problem, mit welchem sich die vorliegende Abhandlung beschäftigt, lautet: Es soll eine Fläche:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

derart bestimmt werden, dass diese Variabeln auf einer bestimmten Curve gegebene Werte besitzen und das Integral:

$$J = \int\int F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')dudv,$$

wo

$$x' = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad x'' = \frac{\partial x}{\partial v} \dots$$

bedeutet, über diese Fläche erstreckt, grösser resp. kleiner ist als dasselbe Integral über eine andere Fläche, welche durch dieselbe Curve hindurchgeht und eine unendlich kleine Variation der ersteren ist. Man bemerkt, dass der Wert des Integrals nur von der Gestalt der Fläche, nicht aber von der Art abhängig ist, wie die Coordinaten x, y, z ausgedrückt sind. Aus dieser Eigenschaft ergeben sich folgende vier Hauptgleichungen:

$$F = x' \frac{\partial F}{\partial x'} + y' \frac{\partial F}{\partial y'} + z' \frac{\partial F}{\partial z'} = x'' \frac{\partial F}{\partial x''} + y'' \frac{\partial F}{\partial y''} + z'' \frac{\partial F}{\partial z''},$$
$$0 = x'' \frac{\partial F}{\partial x'} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + z'' \frac{\partial F}{\partial z'} = x' \frac{\partial F}{\partial x''} + y' \frac{\partial F}{\partial y''} + z' \frac{\partial F}{\partial z''}.$$

Für die erste Variation des Integrals, wenn dasselbe über die Fläche:

$$\overline{x} = x + \xi, \quad \overline{y} = y + \eta, \quad \overline{z} = z + \zeta$$

erstreckt wird, ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\delta J = \int\int \Bigg\{ &\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)\right]\xi \\ &+ \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\eta \\ &+ \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)\right]\zeta \Bigg\} du\, dv,\end{aligned}$$

welches vermöge der obigen Gleichungen umgeformt werden kann in

$$\delta J = \int\int Gw\, du\, dv,$$

wo

$$w = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \xi + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \eta + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \zeta$$

und G ein bestimmter Differentialausdruck zweiter Ordnung ist. Damit δJ verschwinde, muss der von den Variationen ξ, η, ζ unabhängige Factor G verschwinden, und es bestimmt demnach die Differentialgleichung $G = 0$ die Flächen, für welche J ein Maximum oder Minimum werden kann. Der zweite Teil ist der Untersuchung dieser Gleichung gewidmet im Anschluss an die Picard'schen Untersuchungen (Journ. de Math. (4) VI. 145-210, F. d. M. XXII. 1890. 357, JFM 22.0357.01; JFM 22.0357.02; JFM 22.0357.03), und es ergiebt sich, dass zu der obigen notwendigen Bedingung noch zwei Ungleichheitsbedingungen für die Coordinaten x, y, z hinzutreten müssen. Zur Unterscheidung eines Maximums von einem Minimum wird noch eine Function E eingeführt, welche für alle Punkte der Fläche im Falle des Maximums negativ, im Falle des Minimums positiv ist.

Reviewer: Schafheitlin, Dr. (Charlottenburg)

MSC:

49K10 Optimality conditions for free problems in two or more independent variables

Keywords:

extrema; first variation

Full Text: DOI

References:

[1] Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechunung vonH. A. Schwarz. Ges. Abhand. I Band.

[2] Journal de Math. 4 série, tome 6, pag. 145.Sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives.