Ljapunoff, A.

Allgemeines Problem von der Stabilität der Bewegung. (Russian) JFM 24.0876.02
Charkow: 245 pp. (1892).

Dieses Werk enthält einige allgemeine Untersuchungen bezüglich des analytischen Problems, auf welches die Fragen von der Stabilität des Gleichgewichts und der Bewegung sich reduciren lassen, falls die Störungen ausschliesslich von der Veränderung der anfänglichen Bewegungsbedingungen herrühren. –

Fragen dieser Art hängen von der in einem gewissen Sinne angestellten Untersuchung der Differentialgleichungen von der Form

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \frac{dx_2}{dt} = X_2, \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

ab, wo $X_1, X_2, \dots, X_n$ gewisse Functionen der Zeit t und der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind, die in gewisser Hinsicht von den Coordinaten und den Geschwindigkeiten des betreffenden materiellen Systems abhängen, und die für

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$$

sämtlich den Wert 0 haben.

Es handelt sich hier nur darum, zu ermitteln, ob man die Anfangswerte der Functionen $x_1, x_2, \dots, x_n$, die durch die Gleichungen (1) bestimmt werden, so klein bezüglich ihrer Zahlenwerte wählen kann, ohne sie jedoch gleich Null zu setzen, dass die Zahlenwerte dieser Functionen die ganze Zeit nach dem Anfangsmoment gewissen, als Anfangsdaten vorausgesetzte, von Null verschiedene, doch beliebig kleine Grenzwerte nicht übertreffen.

Nachdem der Verfasser diese Frage im bejahenden Sinne gelöst hat, bezeichnet er die Bewegung, die frei von Störungen ist, als stabil bezüglich der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$; im entgegengesetzten Falle aber als labil.

Indem der Verfasser sich auf die Betrachtung ausschliesslich reeller Werte von t beschränkt, welche grösser als ein gegebener Grenzwert sind, setzt er voraus, dass er hier mit Fällen zu thun habe, in welchen die Functionen $X_1, X_2, \dots, X_n$, welche die zweiten Teile der Gleichungen (1) darstellen, für alle in Betracht kommenden Bedeutungen von t, falls der Modul von $x_1, x_2, x_3 \dots, x_n$ hinreichend klein ist, sich in folgenden Reihen

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} p_{si} x_i + \sum P_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$$
$$(s = 1, 2, 3, \dots, n;\ m_1 + m_2 + \cdots + m_n > 1)$$

nach den ganzen positiven Potenzen von $x_1, x_2, \dots, x_n$ entwickeln lassen.

Nimmt man diese Bedingungen als erfüllt an, so besteht die gewöhnliche Lösungsmethode darin, dass man in den oben angeführten Reihen alle Glieder von höherer als erster Ordnung in Bezug auf die Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ weglässt und somit die Frage auf die Lösung linearer Differentialgleichungen folgender Form zurückführt:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \cdots + p_{sn} x_n \qquad (s = 1, 2, 3, 4, \dots, n). \tag{2}$$

Hier entsteht aber die Frage: Wann führt dieses Verfahren wirklich zum Ziel? Mit anderen Worten: Wann können die Glieder von höherer als erster Ordnung ohne Einflusse auf die Stabilität weggelassen werden?

Die Frage wird vom Verfasser auf Grund der folgenden ziemlich allgemeinen Voraussetzungen gelöst:

1) Wie gross auch t ist, so übertrifft der Zahlenwert der Functionen p_{si}, $P_s^{(\dots)}$ nicht eine bestimmte, von t unabhängige Grenze; – 2) die Reihen, durch welche unter den gemachten Voraussetzungen die Functionen X_s sich darstellen lassen, sind convergent, und zwar im gleichen Grade für alle in Betracht kommenden Bedeutungen von t, und

3) die Functionen p_{si} sind so beschaffen, dass man mit Hülfe einer linearen Substitution das System (2)

auf ein System mit constanten Coefficienten bringen kann. Die Bedingungen aber, denen die Substitution Genüge leisten muss, bestimmt man aus der Forderung, dass man bei der Lösung des Problems von der Stabilität für die Gleichungen, in welche die Gleichungen (1) durch die uns interessirende Substitution übergehen, eine ähnliche Frage zu lösen hätte, wie für die Gleichungen (1). (Als Beispiel wollen wir den Fall anführen, wo alle p_{si} periodische Functionen von t mit einer und derselben reellen Periode sind). –

Nimmt man die eben erwähnte Substitution als ausgeführt an, so dass also p_{si} constante Grössen sind, und bezeichnet man die reellen Teile der Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} p_{11}-k & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-k & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{mn}-k \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

mit

$$-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n,$$

so wird die Antwort auf die aufgestellte Frage lauten:

Die Stabilität hängt von den Gliedern von höherer als erster Ordnung in der Gleichung (1) nur in dem Falle nicht ab, wenn die kleinste von den Zahlen

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$$

nicht gleich 0 ist. (Dass man in allen übrigen Fällen Glieder höherer Ordnung in Betracht ziehen muss, wird in einem kurzen Anhange zum vorliegenden Werke nachgewiesen. Siehe "Berichte der Charkow'schen Math. Gesellschaft, III. "Beiträge zur Frage von der Stabilität der Bewegung".) Hierbei erhält man eine bejahende oder verneinende Antwort, je nachdem die kleinste der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ positiv oder negativ ist. –

Einer besonderen Betrachtung müssen also nur die Fälle unterzogen werden, in welchen die kleinste von den Zahlen λ_s Null ist.

Die Lösung der Frage hängt wesentlich von Gliedern höherer Ordnung ab und bietet nicht geringe Schwierigkeiten dar.

Der Verfasser beschränkt sich auf den Fall, in welchem alle $P_s^{(\cdots)}$ entweder constante Grössen oder periodische Functionen von t mit einer und derselben reellen Periode sind, und untersucht die Frage nur für zwei oder weniger complicirte Fälle:

1) wenn nur eine von den Zahlen λ_s Null ist, alle anderen aber positive sind;

2) wenn zwei von den Zahlen λ_s gleich Null, alle anderen aber positiv sind (hierbei ist zu beachten, dass nur die reellen Teile der beiden Wurzeln der Gleichung (3) gleich Null gesetzt werden, durchaus aber nicht die imaginären).

Der Verfasser untersucht diese Fälle so ausführlich, dass dieses den Schwerpunkt des Werkes bildet. – Beiläufig wendet er seine Aufmerksamkeit auch anderen Fragen zu, die in gewisser Beziehung zu den hier angeführten stehen. So entwickelt er im ersten Abschnitt, wo die Gleichungen (1) auf Grund ziemlich allgemeiner Voraussetzungen behandelt werden, die allgemeine Theorie linearer Differentialgleichungen von der Form (2), in welchen die Coefficienten p_{si} irgend welche continuirliche Functionen von t sind, deren Zahlenwert aber eine gewisse Grenze nicht übertrifft.

Hier wird auch auf Lösungen der Gleichung (1) hingewiesen, welche die "asymptotischen Lösungen" des Hrn. Poincaré als einen speciellen Fall in sich schliessen. Im zweiten Abschnitte, wo bei der Behandlung der Gleichungen (1) vorausgesetzt wird, dass alle Coefficienten p_{si}, $P_s^{(\cdots)}$ constante Grössen sind, wendet der Verfasser seine Aufmerksamkeit der Frage nach den periodischen Lösungen dieser Gleichungen zu. Im dritten Abschnitt giebt der Verfasser, nachdem er die Voraussetzung gemacht, dass die Coefficienten p_{si}, $P_s^{(\cdots)}$ periodische Functionen von t mit einer und derselben reellen Periode sind, einige Sätze beüglich der sogenannten characteristischen Gleichung. Einige dieser Sätze dienen zur Ermittelung der Coefficienten dieser Gleichung (der sogenannten Invarianten), andere aber betreffen einige Eigenschaften der Wurzeln derselben. –

Von den Endergebnissen, welche eine unmittelbare Anwendung bei der Lösung einer gewissen Gruppe von Aufgaben der Mechanik finden, wollen wir den Lehrsatz von der Labilität des Gleichgewichts im Falle solcher Kräfte, die eine Kräftefunction besitzen, diese aber in der Gleichgewichtslage nicht ihr Maximum hat, hervor heben.

Die Labilität des Gleichgewichts wird vom Verfasser für zwei gewisse Kategorien von Fällen des Nichtvorhandenseins des Maximums nachgewiesen. -

Reviewer: Joukovsky, Prof. (Moskau)

MSC:

70K20	Stability for nonlinear problems in mechanics	Cited in **13** Reviews
70-02	Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to mechanics of particles and systems	
34D20	Stability of solutions to ordinary differential equations	

Keywords:

stability of motion