Lord Rayleigh

On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium.

(English) JFM 24.1015.02
Phil. Mag. (5) XXXIV, 481-502 (1892).

In der Absicht, eine Vorstellung von den Grenzen für die Anwendung der Formel zu erhalten, welche die Beziehung zwischen dem Brechungsindex und der Dichte ausdrückt, wie diese Formel von L. Lorenz und H. A. Lorentz gegeben ist, und auch in der Absicht, die Beweise zu vereinfachen, wird das Problem hier in der bestimmteren Gestalt betrachtet, die es annimmt, wenn die Widerstände in rechteckiger oder quadratischer Ordnung angereiht auftreten, und weiter wird gezeigt, wie die Annäherung verfolgt werden kann, wenn die Dimensionen der Hindernisse nicht mehr sehr klein sind im Vergleich zu den Abständen zwischen ihnen. Zuerst wird das zweidimensionale Problem betrachtet, und zwar wird die Leitungsfähigkeit für Wärme oder Elektricität eines sonst gleichförmigen, durch cylindrische, in rechteckiger Ordnung aufgerichtete Hindernisse unterbrochenen Mediums untersucht. Die Seiten des Rechteckes sind mit α, β und der Radius des Cylinders mit a bezeichnet, während das Material der Cylinder eine bestimmte, von der des Mediums verschiedene Leitungsfähigkeit besitzt. Beschränkt man die Betrachtung auf die Leitung parallel zu einer der Seiten (α), so lassen sich Reihen für das Potential ausserhalb und innerhalb eines Cylinders ansetzen und durch die Betrachtungen von Grenzbedingungen reduciren. Das Potential V kann man ansehen als herrührend von äusseren Quellen im unendlichen (durch die der Fluss verursacht wird), die ein Glied Hx geben, und auch von vielfachen Quellen auf den Axen der Cylinder. Das unendliche, von den Cylindern besetzte Gebiet hat nach Voraussetzung rechteckige Grenzen parallel zu α und β, erstreckt sich aber unendlich weiter parallel zu a als parallel zu β. Das Verhältnis des gesamten Stromes C quer durch ein Rechteck $\alpha\beta$ zu V_1, dem Potentialfall entsprechend einem Rechtecke in Richtung β, wird dann gefunden, und dies bestimmt die specifische Leitungsfähigkeit des vorliegenden Mediums für Ströme parallel zu α. Bedeutet ν die Leitungsfähigkeit des Materials der Cylinder, wenn die des übrigen Mediums gleich 1 ist, und p den von den Cylindern besetzten verhältnismässigen Raum, so ist die Leitungsfähigkeit für $\beta = \alpha$

$$1 - \frac{2p}{\nu' + p - \frac{3p^4}{\nu'\pi^4} S_4^2 - \frac{7p^8}{\nu\pi^8} S_8^2},$$

wo $\nu' = (1+\nu)/(1-\nu)$ und S_4, S_8 gewisse Reihen bedeuten. Für den Fall, bei welchem die Cylinder nicht-leitend sind ($\nu' = 1$), giebt die Substitution des Wertes von S_4 bis p^4 einschliesslich:

$$1 - \frac{2p}{1 + p - 0{,}3058p^4}.$$

Es wird gezeigt, wie die Berechnung ausgeführt werden kann für den Fall, dass α und β ungleich sind, indem die auftretenden Reihen mit den θ-Functionen eng verbunden sind. Die Abhandlung geht dann zu der Betrachtung sphärischer Hindernisse über, die in rechtwinkliger Folge angeordnet sind, und die Formel, die der oben hingesetzten entspricht, ist bis zu einer gewissen Annäherung und bei ähnlicher Bezeichnung

$$\frac{(2+\nu)/(1-\nu) - 2p}{(2+\nu)/(1-\nu) + p},$$

indem die Ordnung kubisch ist. Bis hierher sind die Ergebnisse in der Sprache der Elektricitätslehre ausgedrückt worden, werden dann aber auf gewisse Probleme der Vibration angewandt. Das einfachste derselben ist das Problem der Wellenbewegung in einem von starren und festgelegten Cylindern oder Kugeln durchsetzten gasartigen Mittel, und zwar wird angenommen, dass die Wellenlänge sehr gross ist im Vergleich zur Periode (α, β, γ) der Structur. Für cylindrische Durchsetzung wird das Quadrat der Geschwindigkeit der Fortpflanzung in dem Verhältnisse $1/(1+p)$ geändert, so dass, wenn μ den Brechungsindex bezogen auf den des undurchsetzten Mittels als Einheit bezeichnet, $(\mu^2 - 1)/p = \text{const.}$, wobei die Ordnung quadratisch ist. Wenn die Hindernisse die Eigenschaften einer Flüssigkeit von endlicher Dichte mit Zusammendrückbarkeit besitzen, so ist für kugelförmige Hindernisse $(\mu^2-1)/p(\mu^2+\frac{1}{2}) = \text{const.}$ Es ist anzumerken, dass die Anwendung dieser Formeln auf massig kleine Werte von p begrenzt ist.

Endlich wird in Analogie zu Maxwell's allgemeiner Theorie elektrischer Leitung die Wellenfläche für die Fortpflanzung in dem durchsetzten Mittel betrachtet, und wenn die Kugeln in kubischer Ordnung angereiht sind und p klein ist, wird die Lorentz'sche Gleichung gewonnen:

$$\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2} \cdot \frac{1}{p} = \text{const.}$$

Wenn die Hindernisse cylindrisch sind und in quadratischer Folge angeordnet, so ist das zusammengesetzte Medium doppelbrechend.

Reviewer: Gibson, Assist. Prof. (Glasgow) (Lampe, Prof. (Berlin))