Zorawski, K.
Ueber Deformation der Flächen. (Polish) JFM 23.0805.01
Krakau Abh. (2) I. 225-291 (1891).

Die Abhandlung enthält eine Anwendung der Lie'schen Transformationstheorie auf die von Lie selbst in den Math. Annalen XXIV (über Differentialinvarianten, S. 574-775, vergl. F. d. M. XVI. 1884. 91, JFM 16.0091.01) angeregte Frage: Bringt man das Bogenelement einer Fläche auf dieForm

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2,$$

und führt man neue Variabeln

$$x_1 = X(x,\ y), \quad y_1 = Y(x,\ y)$$

ein, so erhält das Bogenelement die neue Form

$$ds^2 = E_1 dx_1^2 + 2F_1 dx_1 dy_1 + G_1 dy_1^2;$$

dabei werden $E_1,\ F_1$ und G_1 als Functionen von $E,\ F,\ G, x,\ y$ durch gewisse Relationen bestimmt, die, mit $x_1 = X,\ y_1 = Y$ vereinigt, eine unendliche Gruppe bilden. Die Differentialinvarianten dieser Gruppe, welche bei jeder Biegung der Fläche ihren ursprünglichen Wert behalten, nennt der Verfasser Biegungsinvarianten. Dieselbe Benennung wurde von Herrn Weingarten in der Abhandlung: "Ueber die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von constantem Krümmungsmass" (J. für Math. XCIV, F. d. M. XV. 1883. 637, JFM 15.0637.01) in einer speciellen Bedeutung eingeführt. Zu den Biegungsinvarianten gehören z. B.: das Gauss'sche Krümmungsmass, die Beltrami'schen Parameter und Minding's geodätische Krümmung. Die Abzählung der Biegungsinvarianten verschiedener Ordnungen bildet den Hauptinhalt dieser Arbeit.

Es werden zuerst (Abschnitt I) Hauptsätze der Lie'schen Transformationstheorie mitgeteilt, dann (Abschnitt II) einige allgemeine, für die zu behandelnde Frage wichtigen Theoreme aufgestellt, so z. B. die Aufgabe gelöst: "Aus den gegebenen Incrementen

$$dx = \xi(x,\ y)\delta t, \quad dy = \eta(x,\ y)\delta t$$

der Veränderlichen x und y und aus dem Incremente einer gewissen Function $\psi(x,\ y)$ die Incremente aller ihrer Differentialquotienten nach x und y zu bestimmen." Wir heben noch die folgenden Theoreme hervor:

Theorem I. "Besitzt die allgemeine infinitesimale Transformation einer unendlichen continuirlichen Gruppe in den Veränderlichen $x_1, \dots, x_n,\ y_1, \dots, y_m$ die Form

$$Zf = \sum_1^{p+r} \zeta_k(x_1, \dots, x_n) Z_k f,$$

wo

$$Z_k f = \sum_1^n {}_i\xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1,\ 2,\ \dots, p),$$

$$Z_i f = \sum_i^m {}_i\eta_{li}(y_1, \dots, y_m) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (l = p+1, \dots, p+r)$$

gegebene Ausdrücke sind und die ζ_k ganz willkürliche Functionen, so bilden die infinitesimalen Transformationen

$$Z_{p+1}f,\ Z_{p+2}f, \dots, Z_{p+r}f$$

eine endliche Gruppe."

Theorem IV. “Sind die Gleichungen

$$X_k f = \sum_1^n {}_i \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

von einander unabhängig, dann sind es auch die Gleichungen

$$Z_k f = X_k f + \sum_1^m {}_\mu \zeta_{k\mu}(x_1, \dots, x_n,\ z_1, \dots, z_m)\ \frac{\partial f}{\partial z_\mu} = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, q),$$

wo $\zeta_{k\mu}$ ganz willkürliche Functionen ihrer Argumente bezeichnen.”

Theorem V. “Sind die Gleichungen

$$X_k f = \sum_1^n {}_i \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

von einander unabhängig, so sind die Gleichungen

$$Z_k f = X_k f + \sum_1^m {}_\mu \xi_{k\mu}(x_1, \dots, x_n,\ z_1, \dots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_\mu} = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, q),$$

$$Z_i f = \sum_1^m {}_\nu \xi_{l\nu}(x_1, \dots, x_n,\ z_1, \dots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0$$

$$(l = q + 1, \dots, q + \varrho)$$

($\xi_{k\mu}$ und $\xi_{l\nu}$ sind ganz willkürliche Functionen) dann, und nur dann, von einander abhängig, wenn die Gleichungen

$$Z_l f = 0 \quad (l = q + 1, \dots, q + \varrho)$$

von einander unabhängig sind.”

Es wird dann (Abschnitt III) die eigentliche Aufgabe der Arbeit formulirt und auf die Berechnung der Differentialinvarianten der oben genannten unendlichen Gruppe zurückgeführt. Die allgemeinste infinitesimale Transformation dieser Gruppe lautet

$$Gf = \xi\ \frac{\partial f}{\partial x} + \eta\ \frac{\partial f}{\partial y} - 2(E\xi_{10} + F\eta_{10})\ \frac{\partial f}{\partial E} - (F\xi_{10} + E\xi_{01} + G\eta_{10} + F\eta_{01}) \frac{\partial f}{\partial F} - 2(F\xi_{01} + G\eta_{01}) \frac{\partial f}{\partial G}\,.$$

(Die $\xi_{10}, \eta_{10}, \dots$ bedeuten hier die partiellen Differentialquotienten der Functionen ξ, η der Bezeichnung $\frac{\partial^{i+k}\Phi(x,y)}{\partial x^i \partial y^k} = \Phi_{ik}$ gemäss.)

Die unendliche Gruppe kann aber auf verschiedene Weisen erweitert werden. Erweitert man sie in Bezug auf die Differentialquotienten von E, F, G nach x und y, so gelangt man zu der “Gauss'schen n^{ten} erweiterten Gruppe”:

$$G^{(n)} f = \xi\ \frac{\partial f}{\partial x} + \eta\ \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_0^n {}_i \sum_0^{n-i} {}_k \left(\frac{\delta E_{ik}}{\delta t}\ \frac{\partial f}{\partial E_{ik}} + \frac{\delta F_{ik}}{\delta t}\ \frac{\partial f}{\partial F_{ik}} + \frac{\delta G_{ik}}{\delta t}\ \frac{\partial f}{\partial G_{ik}} \right)\,.$$

Erweitert man sie in Bezug auf die Differentialquotienten der willkürlichen Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ der

Veränderlichen x und y, so bekommt man die "Beltramische n^{te} erweiterte Gruppe"

$$B^{(n)}f = G^{(n-1)}f + \sum_1^m{}_s \sum_0^n{}_i \sum_0^{n-i}{}_k \frac{\delta\varphi_{ik}^s}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial\varphi_{ik}^s}\,.$$

Erweitert man sie noch in Bezug auf die Differentialquotienten von y nach x, wenn y als Functionen von x betrachtet wird, so erhält man die "Minding'sche n^{te} erweiterte Gruppe"

$$M^{(n)}f = G^{(n-1)}f + \sum_1^n{}_l \frac{\delta y^{(l)}}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial y^{(l)}}\,.$$

Endlich wird die Gruppe

$$A^{(n)}f = G^{(n-1)}f + \sum_1^m{}_s \sum_0^n{}_i \sum_0^{n-1}{}_k \frac{\delta\varphi_{ik}^s}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial\varphi_{ik}^s} + \sum_1^n{}_l \frac{\delta y^{(l)}}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial y^{(l)}}$$

"allgemeine n^{te} erweiterte Gruppe" genannt.

Das Problem für die erweiterte Gauss'sche Gruppe wird also auf die Bestimmung derjenigen Functionen f zurückgeführt, für welche

$$G^{(n)}f = 0;$$

da aber ξ und η ganz willkürlich sind, so muss man, um die Differentialgleichungen zu erhalten, deren Lösungen die Biegungsinvarianten sind, die Coefficienten aller Funcitonen ξ, η, $\xi_{\mu,\nu}$, $\eta_{\mu,\nu}$ gleich Null setzen. Dasselbe gilt auch für die anderen erweiterten Gruppen.

Es wird dann (Abschnitt IV) die Anzahl der Gauss'schen Biegungsinvarianten bestimmt; dieselben ergeben sich als Lösungleichungen erster Ordnung mit einer abhängigen Veränderlichen. Es zeigt sich dann, dass es keine Gauss'schen Biegungsinvarianten erster und zweiter Ordnung giebt; die Anzahl der Gauss'schen Biegungsinvarianten dritter Ordnung ist gleich 1, die der vierter Ordnung gleich 1, und allgemein die der n^{ten} Ordnung ($n > 4$) gleich $n - 2$.

Eine analoge Untersuchung führt den Verfasser zur Bestimmung der Anzahl der übrigen Biegungsinvarianten. Die Anzahl der Beltrami'schen Biegungsinvarianten von der ersten bis zur n^{ten} Ordnung ($n > 3$) ist gleich $\frac{n(n+3).m}{2}$, die der Minding'schen ist 1 für $n = 2$, 1 für $n = 3$, 2 für $n = 4$ und gleich 1 für $n > 4$. Die Resultate stellt der Verfasser in folgender Tabelle zusammen:

Anzahl der Biegungsinvarianten:

Ordnung	Gauss'sche	Beltrami'sche	Minding'sche	Sämtliche
1	0	m	0	m
2	0	$3m$	1	$3m+1$
3	1	$4m$	1	$4m+2$
4	1	$6m$	2	$6m+3$
5	3	$6m$	2	$6m+4$
6	4	$7m$	1	$7m+5$
…	…	…	…	…
n	$n-2$	$(n+1)m$	1	$(n+1)m+n-1$
Summe bis zur n^{ten} Ordnung inclusive	$\frac{1}{2}n(n-3)$	$\frac{1}{2}n(n+3)m$	n	$\frac{1}{2}n(n+3)m$ $+\frac{1}{2}n(n-1)$

Im letzten (VI.) Abschnitte giebt der Verfasser eine allgemeine Methode zur Berechnung der Biegungsinvarianten und wendet sie auf die Bestimmung einiger Biegungsinvarianten niedrigster Ordnungen an, nämlich des Gauss'schen Krümmungsmasses, der Beltrami'schen Differentialparameter erster und zweiter Ordnung und der Minding'schen geodätischen Krümmung. Diese Methode des Verfassers beruht auf einigen allgemeinen Sätzen, welche die Anwendung der Jacobi'schen Methode auf die Integration allgemeiner vollständiger Systeme von Differentialgleichungen ermöglichen. Ueber diese Erweiterung der Jacobi'schen Methode hat der Verfasser im III. Bande der "Prace matematyczno-fizyczne" einen Aufsatz escheinen lassen, über welchen wir im nächsten Jahrgange des Jahrbuches referiren werden (siehe JFM 24.0327.01).

Reviewer: Dickstein, (Warschau)