Stroh, E.

Ueber die symbolische Darstellung der Grundsyzyganten einer binären Form sechster Ordnung und eine Erweiterung der Symbolik von Clebsch. (German) JFM 22.0142.01

Math. Ann. XXXVI, 262-303 (1890); Diss. Erlangen. 44 S. 8° (1890).

Dieser Aufsatz bietet einen bemerkenswerten Fortschritt in der Theorie der Syzyganten, sowie in der Symbolik der Formen überhaupt.

Durch die Arbeiten von Perrin, Stéphanos, Hammond und v. Gall Waren im ganzen 204 irreducible Syzyganten der binären Form 6. Ordnung f_6 aufgefunden und berechnet, und zwar nach verschiedenartigen, teils umständlichen, theils schwer controllirbaren Methoden.

Im ersten Teil seiner Arbeit weist der Verf. nach, dass sämtliche 204 Syzyganten verschiedene Formen von im ganzen nur 11 elementaren Syzyganten sind: es sind jede daher durch nur 11 verschiedene Symbole darstellbar und dadurch zugleich vollständig bestimmt. Dabei ist jede Syzygante unabhängig von den übrigen berechnet worden, wodurch fehlerhafte Resultate möglichst vermieden wurden.

Der Gang der Untersuchung stützt sich wesentlich auf eine frühere Abhandlung des Verf. (vgl. F. d. M. XX. 1888. 120, JFM 20.0120.01), in der alle linearen Relationen (Syzygien) zwischen den Ueberschiebungen von je zwei aus vier Formen f, φ, ψ, χ aufgestellt sind. Diese Relationen werden hier auf 11 "elementare" reducirt, deren linke Seiten eben die in Rede stehenden Syzyganten bilden. Um dieselben auf ihre Richtigkeit zu prüfen, nimmt man die darin vorkommenden vier Formen als wirkliche Potenzen linearer Formen an: $f = (x-a)^{n_1}$, $\varphi = (x-b)^{n_2}$, $\psi = (x-c)^{n_3}$, $\chi = (x-d)^{n_4}$; bildet daraus alle Ueberschiebungen und nimmt den ersten Coefficienten jeder derselben. Dies kommt einfach darauf hinaus, dass man z. B. $(f, \varphi)^\lambda$, ersetzt durch $(a-b)^\lambda$, $((f\psi)^2\varphi)^2$ durch $(a-c)^2(a-b)^2$ u. s. f. Die Syzygante wird so eine Form F der Elemente a, b, c, d, die der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial A} + \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial d} = 0$$

genügt, und demzufolge allein durch die drei Differenzen $a-b$, $a-c$, $a-d$ dargestellt werden kann. Man braucht daher in F nur $a = 0$ zu setzen, um dann das identische Verschwinden der Function F einzusehen. Umgekehrt lässt sich aus jeder solchen identisch verschwindenden Function dreier Variabeln die entsprechende Syzygie herstellen. Die Anwendung auf die binäre Form f_6 geschieht nun in der Weise, dass zunächst jede der 26 Clebsch'schen Grundformen als eine Ueberschiebung zweier niedrigeren Grundformen geschrieben wird. Sodann bildet man alle Producte der Grundformen zu zweien, die demnach die Form $(f\varphi)^\lambda(\psi\chi)^\mu$ annehmen; nach Früherem können nunmehr die zugehörigen elementaren Syzyganten entwickelt werden, welche dieses Product enthalten.

Bis zum Grade 9 sind sämtliche irreducibeln Syzyganten ausgewertet, von da ab ist nur derjenige Teil der Syzygante beigesetzt, aus welchem die Irreducibilität derselben ersichtlich ist.

Im zweiten Teile der Arbeit wird die oben berührte symbolische Darstellung $F(a, b, c, d)$ der Syzyganten auf ihren Grund genauer untersucht: es zeigt sich, dass durch Verfolgung eines entsprechenden Leitgedankens die bisherige Clebsch-Gordan'sche Symbolik (und zwar nicht nur für binäre Formen) einer fruchtbaren Verallgemeinerung und damit zugleich Vereinfachung fähig ist.

Beschränken wir uns mit dem Verfasser auf binäre Formen, so kann bekanntlich eine Covariante C, die in den Coefficienten einer Form f vom i^{ten} Grade ist, symbolisch als simultane Covariante der i Potenzen $(a_\lambda x_1 + a_\lambda x_2)^n (\lambda = 1, 2, \dots, i)$ dargestellt werden. Hier darf nun offenbar $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha$ gesetzt werden, ohne dass in C beim Uebergange zum wirklichen Werte irgend eine Vieldeutigkeit der zu ersetzenden Symbole eintritt. Es kann sogar α gleich der Einheit angenommen werden: man hat dann nur C nachträglich mittels eines ersten Coefficienten $\overline{a_0}$ homogen zu machen.

Versteht man unter C_0 das Leitglied C, so bleibt von den 4ursprünglichen Differentialgleichungen für C, wie bekannt, nur eine Charakteristische Gleichung für C_0 übrig, die aber hier die durchsichtige Gestalt annimmt:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=i} \frac{\partial C_0}{\partial a_\lambda} = 0.$$

Jede in den a_i ganze und homogene Function, welche der letzteren Gleichung genügt, liefert eine Covariante C.

Nach einen Satze von Hesse ist aber eine "Form" (d. h. eine homogene ganze Function) von i Variabeln a, welche die Gleichung $\sum \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda = 0}$ befriedigt, dadurch charakterisirt, dass sie eine ebensolche Function von nur $i-1$ Grössen $a_2', a_3', \dots, a_i'$ ist, wo die letzteren als Differenzen der a bestimmt sind:

$$a_2' = a_2 - a_1, \quad a_3' = a_3 - a_1, \quad a_4' = a_4 - a_1 \quad \text{etc.}$$

Um also die allgemeinste Form φ der a von einer Ordnung g zu finden, für welche $\sum \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = 0$ ist, stelle man die allgemeinste Form φ der a' von der Ordnung g auf, in der keine Variable in einer höheren Potenz als n auftritt, und substituire hinterher statt der a' die a. Dies ist immer ausführbar, wenn $g \leqq n$ ist: die anderen Fälle lassen sich darauf zurückführen. Practischer jedoch verfährt man so: Unter "Grundsymbolen" seien diejenigen Lösungen von $\sum \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = 0$ verstanden, welche vom ersten Grade in den a sind. Offenbar giebt es dann nur $i-1$ linear unabhängige, und jede Lösung jener Gleichung kann durch dieselben rational und ganz ausgedrückt werden.

Um demnach die symbolische Darstellung für das Leitglied einer Covariante von f zu erhalten, bilde man aus g Grundsymbolen ein Product, in welchem jedes Symbol höchstens in der n^{ten} Potenz vorkommt.

Die einfachsten Grundsymbole sind die Differenzen $a_r - a_s$, und diese sind es gerade, welche der Clebsch'schen symbolischen Darstellung zu Grunde liegen.

Der Verf. entwickelt darauf hin, wie sich irgend eine in der Symbolik von Clebsch gegebene Covariante in seine Grundsymbole umsetzen lässt, und vice versa.

Da die Anzahl der auftretenden Grundsymbole höchstens $i-1$ beträgt – im Gegensatz zu den $\frac{i(i-1)}{2}$ Clebsch'schen Klammerfactoren – so bietet die neue Darstellung mancherlei Vorteile. Beispielsweise schreibt sich die Covariante

$$\tau = (ab)^2(bc)a_x^{n-2}b_x^{n-3}c_x^{n-1} \text{ in der Gestalt } (a+b-2c)^3.$$

Das Verfahren des Verfassers erscheint besonders brauchbar, wenn die Ordnung n der Ausgangsform f stets höher bleibt als das Gewicht g der zu betrachtenden Covarianten, also bei Formensystemen einer Form unbegrenzt hoher Ordnung, wie sie von englischen Mathematikern (Sylvester, Cayley, MacMahon u. a.) studirt worden sind. Für solche "Semiinvarianten" C_0 gilt dann der grundlegende Satz: "Alle Semiinvarianten vom Grade i und vom Gewichte g sind durch symbolische Potenzen

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_i a_i)^g$$

linear ausdrückbar."

Daraufhin ist der Verf. in der Lage, alle irreducibeln Semiinvarianten (Perpetuanten) von gegebenem Grade i und gegebenem Gewichte g zu ermitteln. Ihre Anzahl ist gleich der Zahl ganzzahliger Lösungen $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_i$ der Gleichung:

$$2\mu_2 + 3\mu_3 + \dots + i\mu_i = g - 2^{i-1} + 1,$$

wodurch ein Satz von MacMahon bestätigt wird (cf. F. d. M, XVI. 1884. 105, JFM 16.0104.04). Aber auch die Bildungen selbst lassen sich in symbolischer Gestalt sofort hinschreiben.

Zum Schlusse giebt der Verf. kurz an, wie sich die entsprechende Umformung der Differentialgleichungen für Invarianten nebst der Bildung der "Grundsymbole" im ternären Gebiete vollzieht.

Reviewer: Meyer, F., Prof. (Clausthal)

Full Text: DOI EuDML