Lie, S.
[Engel, Friedrich]

Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt. Unter Mitwirkung von F. Engel bearbeitet. (German) JFM 21.0356.02

Leipzig. Teubner. X + 632 S. gr. 8° (1888).

Es liegt hier der erste Band eines umfangreichen Werkes vor, in dem Herr Lie die von ihm selbst geschaffene Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen streng systematisch entwickelt. Vorher konnte man diese neue, äusserst fruchtbare Theorie nur aus den zahlreichen Abhandlungen des Herrn Lie kennen lernen, die in drei verschiedenen Zeitschriften zerstreut sind.

Herr Lie ist der erste, der allgemeine Untersuchungen über continuirliche Gruppen angestellt hat (seit 1873, während er allerdings schon seit 1869 einzelne derartige Gruppen betrachtet hatte). Veranlasst wurde er hierzu durch die Bemerkung, dass fast jede Differentialgleichung, die man durch die älteren Methoden integriren kann, bei einer leicht angebbaren continuirlichen Gruppe invariant bleibt, und dass die Möglichkeit, sie zu integriren, eben auf diesem Umstande beruht. Hierdurch wurde er darauf geführt, überhaupt solche Differentialgleichungen zu betrachten, die bei einer beliebigen vorgelegten continuirlichen Gruppe invariant bleiben, und zu untersuchen, was für Integrationsvereinfachungen aus der Kenntniss der Gruppe entspringen. Dieses Problem hat Herr Lie vollständig erledigt, wurde aber dadurch zugleich veranlasst, eine ausführliche Theorie der continuirlichen Gruppen zu entwickeln, und es stellte sich heraus, dass diese Theorie schon an und für sich äusserst fruchtbar und interessant ist, während sie doch ursprünglich bloss eine Hülfstheorie für die Integrationstheorie werden sollte.

Bei der endgültigen Darstellung der Lie'schen Gruppentheorie, die jetzt vorliegt (der zweite Abschnitt ist mittlerweile erschienen, und der dritte soll übers Jahr fertig sein), ist der unterzeichnete Berichterstatter seit 1884 als Mitarbeiter beteiligt, doch rühren die Theorien selbst alle von Lie her, und die Mitwirkung des Unterzeichneten hat nur die Gestalt, in der diese Theorien an die Oeffentlichkeit treten, mit beeinflusst.

Der vorliegende erste Abschnitt entwickelt die Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen; er enthält mit verschwindenden Ausnahmen lauter neue, von Lie selbst gefundene Theorien. Ich will versuchen, von dem reichen Inhalte dieses Abschnitts einen Begriff zu geben, muss mich aber dabei natürlich auf einige der wichtigsten Sätze beschränken.

Nach einer kurzen Einleitung, in der die Begriffe endliche und unendliche Gruppe vorläufig definirt werden, bringt Cap. 1 eine scharfe Definition der endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen.

Eine Schar von ∞^r verschiedenen Punkttransformationen des Raumes $x_1 \dots x_n$:

$$(1) \quad x_i' = f_i(x_1 \dots x_n; \quad a_1 \dots a_r) \quad (i = 1, \dots, n)$$

bildet eine r-gliedrige Transformationsgruppe, wenn zwei Transformationen der Schar, nach einander ausgeführt, stets wieder eine Transformation der Schar ergeben, wenn also aus (1) und:

$$(2) \quad x_i'' = f_i(x_1' \dots x_n'; \quad b_1 \dots b_r) \quad (i = 1, \dots, n)$$

durch Fortschaffung der x' folgt:

$$(3) \quad x_i'' = f_i(x_1 \dots x_n; \quad c_1 \dots c_r) \quad (i = 1, \dots, n),$$

wo die c Functionen von den a und b allein sind:

$$(4) \quad c_k = \varphi_k(a_1 \dots a_r; \quad b_1 \dots b_r) \quad (k = 1, \dots, r).$$

Die f_i werden als analytische Functionen ihrer Argumente vorausgesetzt, die φ_k sind dann ebenfalls analytische Functionen, und zwar sind die Gleichungen (4) sowohl nach den a als nach den b auflösbar.

Betrachtet man in (1) die x und x' als Coordinaten zweier verschiedenen Punkte desselben Raumes R_n, so erscheint die Gruppe (1) als eine Gruppe von Vertauschungen der ∞^n Punkte des R_n. Führt man nun in (1) an Stelle der a neue Parameter ein durch die Substitution $a_k = \psi_k(\alpha_1 \dots \alpha_r)$, so stellen die entstehenden Gleichungen:

$$x'_i = f_i(x_1 \dots x_n; \quad \psi_1(\alpha) \dots \psi_r(\alpha)) \quad (i = 1, \dots, n)$$

wieder eine Gruppe dar, die mit der Gruppe (1) im Grunde identisch ist und daher nur als eine andere Form dieser Gruppe betrachtet wird. Bezieht man andererseits die Punkte x und x' des R_n auf ein anderes Coordinatensystem, setzt man also etwa $y_i = \omega_i(x)$, $y'_i = \omega_i(x')$ und ferner dem entsprechend $x_i = w_i(y), x'_i = w_i(y')$, so erhält man aus (1) Gleichungen von der Form:

$$(5) \quad y'_i = \omega_i(f_1(w_1(y) \dots w_n(y); \quad a_1 \dots a_r)) \quad (i = 1, \dots, n),$$

die ebenfalls eine r-gliedrige Gruppe darstellen.

Herr Lie sagt, dass diese neue Gruppe (5) mit der alten (1) "ähnlich" ist. In sehr vielen Fällen werden auch ähnliche Gruppen als nicht wesentlich von einander verschieden betrachtet.

In Capitel 2 werden gewisse grundlegende Differentialgleichungen für die Functionen f_i in den Gleichungen (1) einer r-gliedrigen Gruppe abgeleitet.

Betrachtet man in (1) die x' als Functionen der a, so bestehen Differentialgleichungen von der Form:

$$(6) \quad \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_j^{1\dots r} \psi_{jk}(a_1 \dots a_r) \xi_{ji}(x'_1 \dots x'_n) \quad (i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, r),$$

die sich auch nach den $\xi_{ji}(x')$ auflösen lassen:

$$(7) \quad \xi_{ji}(x'_1 \dots x'_n) = \sum_1^r {}_k\alpha_{jk}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k},$$

da die Determinante der ψ_{jk} nicht verschwindet; die $\xi_{ji}(x')$ sind hierbei so beschaffen, dass zwischen ihnen niemals Relationen von der Form:

$$(8) \quad c_1 \xi_{1i}(x') + \dots + c_r \xi_{ri}(x') = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

bestehen, in denen die Constanten $c_1, \dots, c_r$ nicht sämtlich verschwinden.

Capitel 3 behandelt die eingliedrigen Gruppen:

$$(9) \quad x'_i = f_i(x_1 \dots x_n; a) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Die Differentialgleichungen (6) haben hier die Form:

$$(10) \quad \frac{dx'_i}{da} = \psi(a) \xi_i(x'_1 \dots x'_n) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Enthält nun die Gruppe (9) die identische Transformation: $x'_i = x_i$ etwa für $a = a^0$, so kann man für a den neuen Parameter:

$$t = \int_{a_0}^{a} \psi(a) da$$

einführen. Die Form, die (9) durch Einführung von t erhält, findet man dann, indem man das simultane System:

$$(11) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1 \dots x'_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

mit den Anfangsbedingungen $x'_i = x_i$ für $t = 0$ integrirt.

Auf diese Weise bekommt man zwei verschiedene Darstellungen für die eingliedrige Gruppe (9); denn die Integralgleichungen von (11) können entweder in der Form:

$$(12) \quad \begin{cases} \Omega_i(x'_1 \dots x'_n) = \Omega_i(x_1 \dots x_n) \qquad (i = 1, \dots, n-1), \\ \Omega_n(x'_1 \dots x'_n) = \Omega_n(x_1 \dots x_n) + t \end{cases}$$

aufgestellt werden oder in Reihenform:

$$(13)\quad x_i' = x_i + \frac{t}{1}\,\xi_i(x) + \frac{t^2}{1.2}\,X(\xi_i) + \frac{t^3}{3!}\,X(X(\xi_i)) + \cdots,$$

$$(i = 1, \ldots, n),$$

wo $X(f)$ den Ausdruck:

$$X(f) = \sum_1^n {}_i\xi_i(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

bezeichnet, unter f eine beliebige Function von $x_1, \ldots, x_n$ verstanden.

Die Gleichungen (12), die mit (13) äquivalent sind, zeigen, dass man aus jedem simultanen System (11) durch Integration mit den Anfangsbedingungen $x_i' = x_i$ für $t = 0$ eine eingliedrige Gruppe bekommt. Da man überdies $y_1 = \Omega_1(x), \ldots, y_n = \Omega_n(x)$ an Stelle der x als neue Veränderliche einführen kann, so ergiebt sich, dass jede eingliedrige Gruppe des R_n mit einer eingliedrigen Gruppe von Translationen:

$$y_1' = y_1, \ldots, y_{n-1}' = y_{n-1}, y_n' = y_n + t$$

ähnlich ist.

Wählt man den Parameter t der eingliedrigen Gruppe (13) unendlich klein $= \delta t$, so erhält man eine der Gruppe angehörige "infinitesimale Transformation":

$$(14)\quad x_i' = x_i + \xi_i(x_1 \ldots x_n)\delta t \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Denkt man sich diese infinitesimale Transformation unendlich oft wiederholt, so erhält man die endlichen Transformationen der Gruppe (13); deshalb sagt Lie, dass die eingliedrige Gruppe (13) von der infinitesimalen Transformation (14) "erzeugt" ist.

Die Gleichungen der infinitesimalen Transformation (14) schreibt Lie auch so:

$$\delta x_1 = \xi_1\delta t, \ldots, \delta x_n = \xi_n\delta t,$$

indem er mit δx_i den unendlich kleinen Zuwachs $x_i' - x_i$ bezeichnet, den x_i bei der infinitesimalen Transformation erhält. Ist nun f eine beliebige Function von $x_1, \ldots, x_n$, so erhält f den unendlich kleinen Zuwachs $\delta f = X(f)\delta t$. Da die infinitesimale Transformation (14) durch den Ausdruck $X(f)$ vollständig bestimmt ist, so benutzt Lie diesen Ausdruck als Symbol für die infinitesimale Transformation (14). Die Berichtigung hierzu liegt darin, dass das Symbol $X(f)$ mit der infinitesimalen Transformation (14) invariant verknüpft ist; führt man in $X(f)$ neue Veränderliche ein, so erhält man das Symbol der infinitesimalen Transformation, die aus (14) durch Einführung der neuen Veränderlichen entsteht. Da übrigens die eingliedrige Gruppe (14) durch die infinitesimale Transformation $X(f)$ vollständig bestimmt ist, so spricht Lie auch geradezu von der eingliedrigen Gruppe $X(f)$.

Die Einführung des Symbols $X(f)$ ist äusserst folgenreich; denn mit diesem Symbole kann man rechnen, gerade der Einführung des Symbols verdankt Lie seine Erfolge in der Gruppentheorie.

Hat man r infinitesimale Transformationen $X_1(f) \ldots X_r(f)$ und bezeichnen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ Constanten, so ist $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ stets wieder eine infinitesimale Transformation, von der Lie sagt, dass sie aus $X_1(f) \ldots X_r(f)$ linear abgeleitet ist. Die r infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \ldots X_r(f)$ heissen insbesondere von einander unabhängig, wenn sich keine von ihnen aus den übrigen linear ableiten lässt, wenn also zwischen ihnen keine Relation $c_1 X_1(f) + \cdots + c_r X_r(f) = 0$ besteht, in der die Constanten $c_1, \ldots, c_r$ nicht sämtlich verschwinden. Sind $X_1(f) \ldots X_r(f)$ von einander unabhängig und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ willkürliche Parameter, so bestimmt der Ausdruck $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ eine Schar von ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen, die endlich Transformationen dieser ∞^{r-1} Gruppen bilden dann stets eine Schar von ∞^r Transformationen.

Capitel 4 kehrt zu den r-gliedrigen Gruppen zurück.

Enthält die Gruppe (1) die identische Transformation: $x_i' = x_i$ etwa für $a_\kappa = a_\kappa^0$, so kann man an Stelle der a neue Parameter $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$ einführen, indem man $a_1, \ldots, a_r$ als Functionen der $\lambda_\kappa t$ durch das simultane System:

$$(15) \quad \frac{da_\kappa}{dt} = \sum_j^{1\dots r} \lambda_j \alpha_{j\kappa}(a_1 \dots a_r) \quad (\kappa = 1, \dots, r)$$

mit den Anfangsbedingungen $a_\kappa = a_\kappa^0$ für $t = 0$ bestimmt. Die Differentialgleichungen (7) gehen jetzt über in:

$$(16) \quad \frac{dx_i'}{dt} = \sum_1^r {}_\kappa \lambda_\kappa \xi_{\kappa i}(x_i' \dots x_n') \qquad (i = 1, \dots, n),$$

und man findet die neue Form, welche die Gruppe (1) bei Einführung der neuen Parameter erhält, durch Integration des simultanen Systems (16) mit den Anfangsbedingungen $x_i' = x_i$ für $t = 0$. Die betreffenden Integralgleichungen lauten, wenn die Abkürzung:

$$\sum_1^n {}_i \xi_{\kappa i}(x_1 \dots x_n) \, \frac{\partial f}{\partial x_i} = X_\kappa(f)$$

benutzt wird, folgendermassen:

$$(17) \quad x_i' = x_i + \frac{t}{1} \sum_1^r {}_\kappa \lambda_\kappa \xi_{\kappa i}(x) + \frac{t^2}{1.2} \sum_{\kappa j}^{1\dots r} \lambda_\kappa \lambda_j X_\kappa(\xi_{ji}) + \cdots$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

Lie bezeichnet diese Form (17) der Gruppe (1) als "kanonische" Form.

Hiermit ist bewiesen, dass die Gruppe (1), wenn sie die identische Transformation enthält, auch die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ enthält, und dass sich die ∞^r Transformationen der Gruppe (1) in ∞^{r-1} eingliedrige Gruppen anordnen. Lie zeigt überdies, dass dann jede infinitesimale Transformation der Gruppe (1) aus $X_1(f) \dots X_r(f)$ linear ableitbar ist.

Capitel 5 enthält eine kurze Darstellung der Theorie der vollständigen Systeme, die von Jacobi und Clebsch begründet ist. Der Hauptsatz dieser Theorie ist, dass q unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen:

$$X_\kappa(f) = \sum_1 {}_i \xi_{\kappa i}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (\kappa = 1, \dots, q)$$

stets dann und nur dann $n-q$ unabhängige Lösungen gemein haben, wenn sie ein q-gliedriges vollständiges System bilden, das heisst, wenn Identitäten von der Form:

$$X_i(X_\kappa(f)) - X_\kappa(X_i(f)) = \sum_\nu^{1\dots q} \varphi_{i\kappa\nu}(x).X_\nu(f)$$

bestehen.

Capitel 6 lässt schon die Fruchtbarkeit des Begriffs der infinitesimalen Transformation ahnen. Die linke Seite einer jeden linearen partiellen Differentialgleichung $X(f) = 0$ ist ja das Symbol einer infinitesimalen Transformation. Hieraus folgt, dass jede Lösung der Gleichung $X(f) = 0$ eine Function ist, die bei der infinitesimalen Transformation $X(f)$ und zugleich bei jeder Transformation der eingliedrigen Gruppe $X(f)$ ihre Form nicht ändert und also invariant bleibt. Sind $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ unabhängige Lösungen von $X(f) = 0$, so stellen die Gleichungen:

$$\omega_1(x_1 \dots x_n) = \text{const.}, \dots, \omega_{n-1}(x_1 \dots x_n) = \text{const.}$$

∞^{n-1} Curven dar, die bei der eingliedrigen Gruppe $X(f)$ invariant bleiben. Diese Curven heissen die Bahncurven von $X(f)$.

Sind $X_1(f)$ und $X_2(f)$ zwei infinitesimale Transformationen, so stellt auch der Klammerausdruck:

$$(X_1 X_2) = X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f)),$$

der nur Differentialquotienten erster Ordnung von f enthält, eine infinitesimale Transformation dar.

Bilden die q unabhängigen linearen partiellen Differentialgleichungen $X_1(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0$ ein vollständiges System, so bleiben die Lösungen dieses vollständigen Systems nicht bloss bei den infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \ldots X_q(f)$, sondern auch bei allen infinitesimalen Transformationen von der Form $(X_i X_\kappa)$ invariant.

Hier ist noch die Identität:

$$(18) \quad ((X_1X_2)X_3) + ((X_2X_3)X_1) + ((X_3X_1)X_2) \equiv 0$$

zu erwähnen, die zwischen drei beliebigen infinitesimalen Transformationen $X_1(f), X_2(f), X_3(f)$ besteht; sie ist ein specieller Fall der berühmten Jacobi'schen Identität.

Capitel 7. Ein Gleichungensystem $\Omega_1(x) = 0, \ldots, \Omega_{n-q}(x) = 0$ bleibt bei der infinitesimalen Transformation $X(f)$ nur dann invariant, wenn die Ausdrücke $X(\Omega_\kappa)$ alle vermöge des Gleichungensystems verschwinden. Ist diese Bedingung erfüllt, so bleibt das Gleichungensystem auch bei allen Transformationen der eingliedrigen Gruppe $X(f)$ invariant. Es werden nun alle Gleichungensysteme bestimmt, die bei q vorgelegten infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \ldots X_q(f)$ invariant bleiben; ihre Bestimmung erfordert bloss Determinantenbildung und die Integration vollständiger Systeme.

Capitel 8. Ein q gliedriges vollständiges Systems $X_1(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0$ bleibt bei der eingliedrigen Gruppe $Y(f)$ nur dann invariant, wenn q Identitäten von der Form:

$$(X_\kappa Y) = \sum_{\nu}^{1\ldots q} \Psi_{\kappa\nu}(x_1 \ldots x_n) X_q(f)$$

bestehen. Die eingliedrige Gruppe $Y(f)$ führt in diesem Falle jede Lösung des vollständigen Systems wieder in eine Lösung über. Sind $\omega_1, \ldots, \omega_{n-q}$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems, so stellen die Gleichungen:

$$\omega_1(x_1 \ldots x_n) = \text{const.}, \ldots, \omega_{n-q}(x_1 \ldots x_n) = \text{const.}$$

eine Zerlegung des R_n in ∞^{n-q} q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten dar, und diese Zerlegung bleibt bei der eingliedrigen Gruppe $Y(f)$ invariant.

Capitel 9. Setzt man:

$$X_\kappa(f) = \sum_{i}^{1\ldots n} \xi_{\kappa i}(x) \, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad A_\kappa(f) = \sum_{j}^{1\ldots \nu} \alpha_{\kappa j}(a) \, \frac{\partial f}{\partial a_i},$$

so sind die Differentialgleichungen (7) nur dann integrabel, wenn Relationen von der Form:

$$(X_i X_\kappa) = \sum_{s}^{1\ldots r} c_{i\kappa s} X_s(f), \quad (A_i A_\kappa) = \sum_{s}^{1\ldots r} c_{i\kappa s} A_s(f)$$

bestehen. Die $c_{i\kappa s}$ Constanten und müssen die Relationen:

$$(19) \begin{cases} c_{i\kappa s} + c_{\kappa i s} = 0, \\ \sum_{1}^{r} {}_\nu (c_{i\kappa\nu} c_{\nu j s} + c_{\kappa j \nu} c_{\nu i s} + c_{j i \nu} c_{\nu \kappa s}) = 0 \end{cases}$$

befriedigen (wegen der Identität (18)).

Zwischen irgend r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \ldots X_r(f)$ einer r-gliedrigen Gruppe bestehen demnach Relationen von der Form:

$$(20) \quad (X_i X_\kappa) = \sum_{s}^{1\ldots r} c_{i\kappa s} X_s(f), \qquad (i, \kappa = 1, \ldots, r).$$

Sind ferner $X(f)$ und $Y(f)$ zwei infinitesimale Transformationen der Gruppe, so enthält die Gruppe stets auch die infinitesimale Transformation (XY).

Lie beweist nun den Fundamentalsatz seiner Theorie: Stehen r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1(f) \ldots X_r(f)$ in Beziehungen von der Form (20), so erzeugen sie eine r-gliedrige Gruppe, deren allgemeinste infinitesimale Transformation die Form $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ hat. Lie nennt diese Gruppe kurz die Gruppe $X_1(f)\dots X_r(f)$.

Um nicht zu weitläufig zu werden, will ich von jetzt an bloss einzelne Sätze erwähnen.

Die Bestimmung aller continuirlichen Untergruppen einer r-gliedrigen Gruppe $X_1(f)\dots X_r(f)$ erfordert bloss algebraische Operationen (Capitel 12).

Die Begriffe transitiv, intransitiv, primitiv und imprimitiv, die aus der Substitutionentheorie bekannt sind, lassen sich auf die endlichen continuirlichen Gruppen übertragen (Capitel 13).

Kennt man die endlichen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $X_1(f)\dots X_r(f)$, so kann man alle Gleichungensysteme oder, was dasselbe ist, alle Mannigfaltigkeiten, die bei der Gruppe invariant bleiben, ohne Integration bestimmen. Kennt man bloss die infinitesimalen Transformationen, so erfordert die Bestimmung nur Determinantenbildung und die Integration vollständiger Systeme (Capitel 14).

Die aus der Substitutionentheorie bekannten Begriffe: einfache Gruppe, invariante Untergruppe (man braucht allerdings dafür gewöhnlich den nichtssagenden Ausdruck: ausgezeichnete Untergruppe), holoedrischer und meroedrischer Isomorphismus sind auch auf continuirliche Gruppen übertragbar (Capitel 15, 17, 21). Insbesondere nennt Lie zwei r-gliedrige Gruppen $X_1(f)\dots X_r(f)$ und $Y_1(f)\dots Y_r(f)$ holoedrisch isomorph oder gleich zusammengesetzt, wenn die infinitesimalen Transformationen $Y_1(f)\dots Y_r(f)$ der zweiten Gruppe so gewählt werden können, dass mit den Relationen (20) zugleich Relationen von der Form:

$$(Y_iX_\kappa)=\sum_1^r {}_s c_{i\kappa s}Y_s(f)$$

mit denselben Constanten $c_{i\kappa s}$ bestehen. Lie beweist, dass diese Definition des holoedrischen Isomorphismus mit der in der Substitutionstheorie üblichen äquivalent ist. Soll entschieden werden, ob zwei vorgelegte r-gliedrige Gruppen mit gegebenen infinitesimalen Transformationen gleich zusammengesetzt sind, so sind nur algebraische Operationen erforderlich.

Das System der Constanten $c_{i\kappa s}$ in den Relationen (20) nennt Lie die Zusammensetzung der Gruppe.

Bemerkenswert ist, dass man in jeder r-gliedrigen Gruppe $X_1(f)\dots X_r(f)$ eine mit ihr isomorphe lineare homogene Gruppe angeben kann, die sogenannte "adjungirte Gruppe", die von den r infinitesimalen Transformationen:

$$E_\kappa(f)=\sum_{is}^{1\dots r} c_{i\kappa s}e_i\,\frac{\partial f}{\partial e_s}\qquad(\kappa=1,\dots,r)$$

erzeugt ist. Diese adjungirte Gruppe spielt eine grosse Rolle bei allen Untersuchungen über Untergruppen u. s. w. (Capitel 16).

Wünscht man zu entscheiden, ob zwei r-gliedrige Gruppen in n Veränderlichen, deren infinitesimale Transformationen man kennt, ähnlich sind, so sind ausser algebraischen Operationen nur noch Eliminationen erforderlich.

Hat man ein System von r^3 Constanten $c_{i\kappa s}$ das die Gleichungen (19) erfüllt, so giebt es immer r-gliedrige Gruppen von der Zusammensetzung $c_{i\kappa s}$. Der Beweis dieses wichtigen Satzes wird zwar erst in dem mittlerweile erschienenen zweiten Abschnitt gebracht, es werden aber in dem ersten Abschnitt Methoden entwickelt, um alle r-gliedrigen transitiven Gruppen von gegebner Zusammensetzung $c_{i\kappa s}$ zu bestimmen, wenn man bereits eine derartige Gruppe kennt; diese Methoden erfordern höchstens die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Wünscht man zu wissen, wie viele Typen von transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung es giebt, so sind nur algebraische Operationen erforderlich; Lie rechnet dabei zwei Gruppen zu demselben Typus, wenn sie ähnlich sind. Kennt man alle transitiven Gruppen mit r und weniger Parametern, so kann man alle r-gliedrigen intransitiven Gruppen in einer gegebenen Zahl von Veränderlichen ohne Integration bestimmen (Capitel 22).

Hat man eine r-gliedrige Gruppe in $n+m$ Veränderlichen $x_1,\dots,x_n,\ z_1,\dots,z_m$, und betrachtet man $z_1,\dots,z_m$ als Functionen von $x_1,\dots,x_n$, so transformirt die Gruppe auch die Differentialquotienten der z nach den x. Es giebt nun immer Functionen von den x, den z und den Differentialquotienten:

$$\frac{\partial z_\mu}{\partial x_\nu},\ \frac{\partial^2 z_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\tau},\ \dots,$$

die bei der betreffenden Gruppe invariant bleiben. Solche Functionen bezeichnet Lie als "Differentialinvarianten" der Gruppe. Die Zahl der Differentialinvarianten einer jeden r-gliedrigen Gruppe ist unbegrenzt, alle Differentialinvarianten von gegebener Ordnung können durch Integration eines vollständigen Systems gefunden werden (Capitel 25).

Ausser den erwähnten Theorien enthält der vorliegende erste Abschnitt noch eine grosse Menge von anderen, die nicht minder wichtig sind, die aber auch nur zu erwähnen mir der Raum verbietet. Den reichen Inhalt des ersten Abschnitts werden hoffentlich schon die gegebenen Andeutungen einigermassen erkennen lassen.

Reviewer: Engel, Prof. (Leipzig)