Schur, F.
Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen. (German)
JFM 21.0371.01
Math. Ann. XXXV, 161-197 (1890); auch als Festschrift der Univ. Dorpat für die Sternwarte Pulkowa (1890).

Herr Schur giebt in seiner Arbeit eine neue Ableitung mehrerer Hauptsätze aus der Lie'schen Theorie der endlichen continurlichen Transformationsgruppen.

Er geht aus von einer Schar von ∞^r Transformationen:

$$(1) \quad x_i' = f_i(x_1 \dots x_n; \quad u_1 \dots u_r) \quad (i = 1, \dots, n),$$

deren Gleichungen für $u_1 = \dots = u_r = 0$ die identische Transformation liefern und ausserdem so beschaffen sind, dass in einer gewissen Umgebung von $u_\kappa = 0$ zu zwei verschiedenen Wertsystemen $u_1 \dots u_r$ stets auch zwei verschiedene Transformationen gehören. Die f_i sollen analytische Functionen ihrer Argumente sein.

Soll die Schar (1) eine r-gliedrige Gruppe bilden, so müssen für alle Werte von $x_1 \dots x_n$, $u_1 \dots u_r$, $v_1 \dots v_r$ innerhalb gewisser Bereiche Identitäten von der Form:

$$(2) \quad f_i(f_1(x,u) \dots f_n(x,u); \quad v_1 \dots v_r) = f_i(x_1 \dots x_n; \quad \varphi_1(u,v) \dots \varphi_r(u,v))$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

bestehen. Hier sind die φ_κ gewisse Functionen, die ihrerseits Identitäten von der Form:

$$(3) \quad \varphi_\kappa(\varphi(u,v); w) = \varphi_\kappa(u; \varphi(v,w)) \quad (\kappa = 1, \dots, r)$$

befriedigen, so dass die Gleichungen:

$$(4) \quad u_\kappa' = \varphi_\kappa(u_1 \dots u_r; \; v_1 \dots v_r) \quad (\kappa = 1, \dots, r)$$

eine r-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen $u_1 \dots u_r$ darstellen, die von Herrn Lie so genannte Parametergruppe.

Durch Entwickelung der Identitäten (2) nach Potenzen von $v_1 \dots v_r$ beweist Herr Schur in § 1 seiner Arbeit, dass zum Bestehen der Identitäten (2) die Uebereinstimmung der Glieder erster Ordnung auf beiden Seiten notwendig und hinreichend ist. Er erhält auf diese Weise die Gleichungen:

$$\left[\frac{\partial f_i(f(x,u),v)}{\partial v_k}\right]_{v=0} = \sum_1^r {}_j \frac{\partial f_i(x,\varphi(u,0))}{\partial \varphi_j(u,0)} \cdot \left[\frac{\partial \varphi_j(u,v_k)}{\partial v_k}\right]_{v=0}.$$

Setzt man daher:

$$\left[\frac{\partial f_i(x',v)}{\partial v_k}\right]_{v=0} = \xi_{ki}(x_1' \dots x_n'), \quad \left[\frac{\partial \varphi_j(x,v)}{\partial v_k}\right]_{v=0} = \omega_{kj}(u_1 \dots u_r),$$

so werden die Gleichungen (1) dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe darstellen, wenn die x_i' als Functionen der u_k die rn Differentialgleichungen:

$$(5) \quad \xi_{ki}(x_1' \dots x_n') = \sum_1^r {}_j \frac{\partial x_i'}{\partial u_j} \, \omega_{kj}(u_1 \dots u_r)$$

$$(k = 1, \dots, r; \quad i = 1, \dots, n)$$

befriedigen. Damit sind die grundlegenden Differentialgleichungen des Herrn Lie wiedergefunden; zugleich stellen die Ausdrücke:

$$\sum_1^n {}_i \xi_{ki}(x'_1 \dots x'_n) \frac{\partial f}{\partial x'_i} \quad (k = 1, \dots, r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe (1) dar und die Ausdrücke:

$$\sum_1^r {}_j \omega_{kj}(u_1 \dots u_r) \frac{\partial f}{\partial u_j} \quad (k = 1, \dots, r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen der Parametergruppe (4). Ausserdem genügen die u'_k in (4) Differentialgleichungen von der Form:

$$(6) \quad \omega_{kj}(u') = \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial u'_j}{\partial u_\tau} \omega_{k\tau}(v) \quad (k, j = 1, \dots, r).$$

Endlich nimmt jedes $\omega_{kj}(u)$ für $u = 0$ den Wert δ_{kj} an, wo $\delta_{kj} = 0$ oder 1, je nachdem $k \neq j$ oder nicht.

Die Untersuchung einer beliebigen r-gliedrigen Gruppe ist hierdurch, wie bei Herrn Lie, auf die folgenden beiden Aufgaben zurückgeführt: Erstens, r^2 Functionen $\omega_{kj}(u)$ zu finden, die für $u = 0$ gleich δ_{kj} werden und so beschaffen sind, dass sich aus (5) die u'_k als solche Functionen der v bestimmen lassen, die für $v = 0$ gleich u_k werden. Zweitens, rn Functionen $\xi_{ki}(x')$ zu finden, die keine Relationen von der Form:

$$\sum_1^r {}_k \, a_k \xi_{ki}(x') = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

befriedigen und so beschaffen sind, dass sich aus (5) die x'_i als solche Functionen der u bestimmen lassen, die für $u = 0$ gleich x_i werden.

Herr Schur bestimmt nun in § 2 die u' aus (5) direct als Potenzreihen der v und findet so als notwendige und hinreichende Bedingung, dass die $\omega_{kj}(u)$ den bekannten Lie'schen Gleichungen:

$$(7) \quad \sum_1^r {}_j \left\{ \omega_{ij}(u) \frac{\partial \omega_{k\tau}(u)}{\partial u_j} - \omega_{kj}(u) \frac{\partial \omega_{i\tau}(u)}{\partial u_j} \right\} = \sum_1^r {}_s c_{iks} \omega_{s\tau}(u)$$

genügen müssen, während die $\xi_{ki}(x')$ die Gleichungen befriedigen:

$$(8) \quad \sum_1^r {}_\mu \left\{ \xi_{i\mu}(x') \frac{\partial \xi_{k\nu}(x')}{\partial x'_\mu} - \xi_{k\mu}(x') \frac{\partial \xi_{i\nu}(x')}{\partial x'_\mu} \right\} = \sum_1^r {}_s c_{iks} \xi_{s\nu}(x').$$

Die c_{iks} sind Constanten.

In § 3 sucht Herr Schur r^2 Functionen $\omega_{k\tau}(u)$ zu bestimmen, die für $u = 0$ die Werte $\delta_{k\tau}$ annehmen und den Gleichungen (7) genügen. Durch Berechnung der Potenzreihen für die $\omega_{k\tau}(u)$ ergiebt sich, dass die c_{iks} den bekannten Lie'schen Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0, \\ \sum_1^r {}_\tau \{ c_{ik\tau} c_{\tau js} + c_{kj\tau} c_{\tau is} + c_{ji\tau} c_{\tau ks} \} = 0 \end{cases}$$

genügen müssen. Sind diese Gleichungen erfüllt, und unterwirft man die $\omega_{kj}(u)$ noch den Bedingungen:

$$(10) \quad \sum_1^r {}_k u_k \omega_{kj}(u) = u_j \quad (k = 1, \dots, r),$$

so sind die $\omega_{kj}(u)$ eindeutig bestimmt, und es ergeben sich für diese Functionen merkwürdige Potenzreihen, deren Convergenz sich nachweisen lässt. Hierdurch ist ein neuer Beweis des Lie'schen Satzes geliefert: Genügen die c_{iks} den Gleichungen (9), so giebt es immer eine r-gliedrige einfache transitive Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks}. Neu ist auch, dass für beliebige c_{iks} eine solche Gruppe wirklich aufgestellt wird.

Dass die Einführung der Bedingungen (10) keine Beschränkung mit sich bringt, zeigt Herr Schur, indem er beweist, dass man aus einem Lösungssysteme der Gleichungen (7) jedes andere herleiten kann. Das ist der Lie'sche Satz: Zwei r-gliedrige einfach transitive Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} sind stets ähnlich.

Nachdem die $\omega_{kj}(u)$ in der angegebenen Weise bestimmt sind, erhält Herr Schur durch Integration der Gleichungen (6) mit den Anfangsbedingungen $u' = u$ für $v = 0$ Gleichungen von der Form (4), die eine r-gliedrige einfach transitive Gruppe darstellen. Herr Schur zeigt, dass diese Gruppe die von Herrn Lie so genannte "kanonische" Form besitzt; die Gleichungen:

$$u'_k = \varphi_k(u_1 \dots u_r; \quad v_1 t, \dots v_r t) \qquad (k = 1, \dots, r)$$

stellen nämlich, wenn man die v fest wählt und t beliebig lässt, stets eine eingliedrige Untergruppe der r-gliedrigen dar.

§§ 4 und 5 wollen wir übergehen, da sie weniger Neues enthalten.

In § 6 werden die Lösungen der Differentialgleichungen (8) aufgestellt, für den Fall, dass die r infinitesimalen Transformationen:

$$(11) \qquad \sum_1^r {}_i \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_i} \qquad (k = 1, \dots, r)$$

eine r-gliedrige transitive Gruppe erzeugen sollen. Man kann es da zunächst immer so einrichten, dass $\xi_{ki}(0) = \delta_{ki}$ ist. Verlangt man ausserdem noch, dass die Gleichung:

$$(12) \qquad \sum_1^n {}_\nu x'_\nu \sum_1^n {}_i \xi_{\nu i}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_i} = \sum_1^n {}_i x'_i \frac{\partial f}{\partial x'_i}$$

besteht, so sind, wie Herr Schur zeigt, die $\xi_{ki}(x')$ eindeutige bestimmte convergente Potenzreihen; allerdings ergeben sich noch gewisse Bedingungen für die Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformationen (11). In derselben Weise wie früher lässt sich zeigen, dass die Benutzung der Gleichung (12) keine Beschränkung mit sich bringt.

Hierdurch ist eine neue Lösung der zuerst von Herrn Lie erledigten Aufgabe gewonnen: alle transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu finden.

Der § 6 endlich giebt einen Beweis für den Lie'schen Satz, dass jede r-gliedrige Gruppe, welche die identische Transformation nicht enthält, in einer r-gliedrigen Gruppe mit der identischen Transformation steckt.

Im Vorstehenden sind überall die Schur'schen Bezeichnungen in die Lie'schen umgesetzt. Es wäre erfreulich, wenn sich Herr Schur der einfachen und folgerichtig durchgeführten Bezeichnungweise des Herrn Lie anschliessen würde.

Reviewer: Engel, Prof. (Leipzig)

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet von Sophus Lie. Leipzig, Teubner 1888. Ich werde dieses Werk im Folgenden immer kurz als ?Transf? citren. Die in der Einleitung erwähnten Theoreme des Herrn Lie werden später noch genau citirt werden.

[2] Schur, Zur Theorie der ausn Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen, Math. Ann. Bd. 33, S. 49 ff.

[3] Vergl. {\S} 7 dieser Abhandlung.

[4] S. etwa Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 5. Aufl. Leipzig, Hirzel, 1881, S. 142 u. 143.

[5] Vergl. Transf. Theorem 1, S. 18.

[6] Vergl. Transf. Theorem 11, S. 404.

[7] Vergl. des Verf. o. a. Abhandlung, S. 52 u. 53.

[8] Vergl. {\S} 4. Einleitung und Anmerkung auf S. 177.

[9] Vergl. Transf. Theorem 3, p. 33, welches sich fretlich mit unserem Satz nur theilweise deckt.

[10] Vergl. Transf. Theorem 24, p. 158.

[11] Vergl. Transf. Theorem 8, p. 65.

[12] Vergl. S. v. Kowalevsky, zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Journ. f. r. u. a. M. Bd. 80, S. 1 ff. und etwa Biermann, Theorie der analytischen Functionen, Leipzig, Teubner 1887, S. 244 ff.

[13] Vergl. den ohne Beweis aufgestellten Satz I im 17. Capitel von Transf. S. 297.

[14] Vergl. die von Herrn Engel herrührende Bemerkung in Transf. S. 429.

[15] Vergl. Transf. Theorem 24, p. 158.

[16] Vergl. {\S} 7.

[17] S. Transf. Theorem 33, S. 210.

[18] Vergl. Transf. Kap. 19 und 22; man wolle aber bemerken, dass bei Herrn Lie die Bestimmung aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung immer nur gelöst ist unter der Voraussetzung, dasseine solche Gruppe bekanut sei. Was die Theorie der Aehnlichkeitr-gliedriger Gruppen betrifft, so sei darauf hingewiesen, dass unser Satz den Satz 3 in Transf. S. 359 umfasst.

[19] Vergl. Transf. Theorem 26, S. 163.