Kötter, E.

Die Hesse'sche Curve in rein geometrischer Behandlung. (German) JFM 21.0616.01

Math. Ann. XXXIV, 123-149 (1889).

Dieser Aufsatz stellt sich die Aufgabe, die Hesse'sche Curve einer gegebenen rein geometrisch zu untersuchen, und giebt zugleich eine Ergänzung des von dem Verfasser herrührenden Aufsatzes: "Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven". (Berl. Abh., F. d. M. XIX. 1887. 577 ff., JFM 19.0577.02).

Der erste Abschnitt enthält die geometrischen Beweise einiger Sätze über Curven mit mehrfachem Punkte; insbesondere werden Büschel von Curven betrachtet, welche bestimmt sind durch zwei Curven K_1^n und K_2^n, für welche der Punkt A ein ϱ-facher resp. ν-facher Punkt ist. Ist $\varrho > \nu$, so haben alle Curven des Büschels mit Ausnahme von K_1 in A dieselbe Tangentengruppe.

Im zweiten Abschnitt wird wohl zum ersten Male streng auf geometrischem Wege der Satz über die gemischten Polaren bewiesen, dass

$$(P,Q)^{n-2} : K^n \quad \text{mit} \quad (Q,P)^{n-2} : K^n$$

identisch ist. Dann wird das Verhalten der Polaren für Curven mit mehrfachem Punkte untersucht.

Im dritten Abschnitt wird die Jacobi'sche Curve eines Netzes zweiter Stufe betrachtet, und zwar wird diese Curve definirt als Ort derjenigen Punkte, in welchen alle Curven eines Büschels des Netzes einander berühren. Zu diesem Zwecke wird zunächst der Ort derjenigen Punkte untersucht, in welchen Curven zweier beliebigen Büschel p^{ter} resp. q^{ter} Ordnung einander berühren. Diese Curve ergiebt sich als Erzeugnis zweier projectiven Curvenbüschel $(2p-1)^{\text{ter}}$ und $(2q-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche ausserdem eine Gerade erzeugen. Hieraus folgt, wenn die beiden ersten Büschel einem Netze angehören, $3n-3$ als Ordnung für die Jacobi'sche Curve. Es werden dann die speciellen Eigenschaften letzterer Curve aufgesucht, wenn Curven des Netzes mehrfache Punkte besitzen, und wenn alle Curven desselben einen gemeinsamen mehrfachen Punkt enthalten.

Im vierten Abschnitt wird das Netz der Curven als die ersten Polaren einer Curve n^{ter} Ordnung specialisirt. Die Jacobi'sche Curve geht dann in die Hesse'sche Curve über. Es wird mit Benutzung des Satzes über die gemischten Polaren das Verhalten der Hesse'schen Curve ausserhalb mehrfacher Punkte der Grundcurve untersucht, was die Herren Geiser und Del Pezzo schon auf analytischem Wege ausgeführt haben. Ferner ergiebt sich ein Satz, der als speciellen Fall das Kriterium des Herrn Voss für gemeinsame Wendepunkte einer Grundcurve mit ihrer Hesse'schen Curve enthält.

Reviewer: Stahl, W., Prof. (Berlin)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Vergl. "Grundzüge einer rein geometrischen Tbeoric der algebraischen ebenen Curven{". Abbandlungen der Berliner Academie, 1887.}

[2] "Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado etc.{" Brioschi Ann. Serie II, Bd. 9, S. 35?41.}

[3] "Sulla curva Hessiana.{" Nap. Rend., 1883, S. 203?218.}

[4] "Zur Theorie der Hesse'schen Determinante.{" Diese Zeitschrift, Bd. XXX, S. 418?424.} · Zbl 19.0150.01

[5] Vergl. a. a. O. "Zur Theorie der Hesse'schen Determinante.{" Diese Zeitschrift, Bd. XXX, S. 418?424. {\S}{\S} 143?147.}

[6] Vergl. a. a. O. "Zur Theorie der Hesse'schen Determinante.{" Diese Zeitschrift, Bd. XXX, S. 418?424. {\S}{\S} 148 und 152.}

[7] Vergl. a. a. O."Zur Theorie der Hesse'schen Determinante.{" Diese Zeitschrift, Bd. XXX, S. 418?424. {\S}{\S} 161?165. Offenbar euthält die Polargruppe die harmonischen Mittelpunkte erster Ordnung der Gruppep(K R) hinsichtlichP und die erste Defimtion deckt sich daher mit der Cremona-Grassmann'schen. [Vergl. Herrn Cremona's ?introduzione? Nr. 68ff.] Eineallge-

meine Definition der harmonischen Mittelpunkte beliebig hoher Ordnung, welche die obige als speciellen Fall enthält, gab zuerst Herr Kohn [?Zur Theorie der harmonischen Mittelpuokte etc.? Wien. Ber., Bd. 88, S. 424?431.] Die obige Umformung der Cremona'schen Definition, übrigens ohne rein geometrischen Beweis, benutzte derselbe in der Abhandlung: ?Ueber Satelliteurven und Flächen?, Wien. Ber, Bd. 89, S. 144?172. Herr Castelnuovo dehnte Herrn Kohn's Theorie auf gemischte Polargruppen aus Vergl.: ?Studio dell'involuzione generale etc.? Ven. Jat. Atti (6), Bd. S. 1167?1200. Die Polaren-Definition liegt seiner Arbeit ?Studii sulla teoria della involuzione nel piano? ibidem, (S. 1559?1594) zu Grunde. Dass die Polare auch mit einerP nicht enthaltenden Curve nurn-1 Punkte gemein hat, zeigt Herr Castelnuovo durch Behandlung des Netzes der Curven, welche hinsichtlichP dieselbe Polare haben. Im übrigen verweise ich auf die a. a. O., Note 37, gemachten Literaturangaben.}

[8] Vergl. a. a. O.?Zur Theorie der Hesse'schen Determinante.? Diese Zeitschrift, Bd. XXX, S. 418?424. {\S} 137 u. {\S} 151.

[9] Vergl. a. a. O.?Zur Theorie der Hesse'schen Determinante.? Diese Zeitschrift, Bd. XXX, S. 418?424. {\S} 56 bez. 34b.

[10] Vergl. Herrn Cremona's ?Introduzione etc.? Nr. 87 und 90.

[11] Man vergl. Herrn Cremona's Entwickelungen a. a. O. ?Introduzione etc.? Nr. 87 und 90. No. 96, die zwar nur auf die beiden einfachsten Fälle sich bezieheu, die im Netze der ersten Polaren auftreten, die aber sofort auf die allgemeinen Fälle ausgedehnt werden können.

[12] Vergl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen, S. 383.

[13] Vergl. a. a. O., Clebsch-Lindemann, Vorlesungen, S. 423.

[14] Auch dies letztere zeigt Herr Del Pezzo a. a. O., Clebsch-Lindemann, Vorlesungen, {\S} 11.

[15] Diese Criterien sind in der That von Herrn Del Pezzo a. a. O., {\S}{\S} III und IV entwickelt worden. Dass die Hesse'sche Curve im ersten Fall einen Doppelpunkt besitzt, hat schon Herr Geiser a. a. O. gezeigt.

[16] Vergl. z. B. Clebsch-Lindemann, ?Vorlesungen über Geometrie?, S. 553.

[17] Vergl. a. a. O.,z. B. Clebsch-Lindemann, ?Vorlesungen über Geometrie?, S. 553. {\S} III.H undH 1 sind jedenfalls mehrfache Punkte auch der Steiner'schen Curve, daH 3 undH 1 3 entweder beide dreifache Punkte oder beide Spitzen besitzen. Vergl. Clebsch-Lindemann ?Vorlesungen etc.? S. 368, 369.

[18] Vergl. wegen dieser Bestimmung derK n nicht berührenden Tangenten die Arbeit des Herrn Brill: ?Ueber die Hesse'sche Curve?, diese Zeitschr., Bd. 13. S. 176?182 (Seite 178). Sie lassen sich, wie auch aus der geometrischen Entwickelung hervorgeht, durch die Hesse'sche Determinante der jene ? Tangenten bestimmenden binären Form darstellen.

[19] ibiden, Vergl. wegen dieser Bestimmung derK n nicht berührenden Tangenten die Arbeit des Herrn Brill: ?Ueber die Hesse'sche Curve?, diese Zeitschr., Bd. 13, S. 178, Fussnote 2.

[20] Es ist klar, dass sich in unendlicher Nähe vonF selbst nun noch andere mehrfache Punkte der Grundeurve finden. 1stF z. B. ein Selbstberührungspunkt der Curve, so wird ?=3, ?=2, und die folgende Entwickelung ergiebt im Emklang mit Herrn Brill's Resultat, (a. a. O., S. 178) dass die Hesse'sche CurveF vierfach enthält undf zur zweifachen Tangente hat.