Stroh

Ueber eine fundamentale Eigenschaft des Ueberschiebungsprocesses und deren Verwertung in der Theorie der binären Formen. (German) JFM 20.0120.01

Math. Ann. XXXIII, 61-108 (1889).

Wird die Ueberschiebung zweier binären Formen f und φ nicht als Process, sondern als eine Verknüpfung aufgefasst, so unterliegt diese Verknüpfungsart folgenden Gesetzen: I. dem distributiven Gesetze, welches sich in der Formel

$$(f\pm\varphi,\psi)_\lambda=(f,\psi)_\lambda\pm(\varphi,\psi)_\lambda$$

ausspricht; II. dem commutativen Gesetze (in erweiterter Fassung)

$$(f,\varphi)_\lambda=(-1)^\lambda(\varphi,f)_\lambda;$$

III. dem associstiven Gesetze, d. h. es gilt die Formel

$$((f,\varphi)_{a_3},\psi)_{a_1+a_2}=\sum^{\lambda}c_\lambda(f,(\varphi,\psi)_{a_2-\gamma+\lambda,})_{a_1+a_3+\gamma-\lambda},$$

welche aussagt, dass in jeder Ueberschiebung, die aus drei Formen f,φ,ψ gebildet werden kann, die Art der Zusammenfassung der drei Formen gleichgültig ist, wenn nur an Stelle einer Ueberschiebung ein Aggregat der anders gebildeten Ueberschiebungen gesetzt wird. Auf der Anwendung der letzten Formel, in welcher c_λ gewisse Zahlencoefficienten bedeuten, beruht im wesentlichen die weitere Untersuchung. Was zunächst den Fall von drei binären Formen f_1,f_2,f_3 anbetrifft, so lassen sich diese nur auf folgende drei Arten zu Ueberschiebungen zusammenfassen

$$((f_1,f_2)_\lambda,f_3)_\mu,\quad((f_1,f_3)_\lambda,f_2)_\mu,\quad((f_2,f_3)_\lambda,f_1)_\mu$$

Die Summe $\lambda+\mu=g$ heisst das "Gewicht" der Ueberschiebung, und alle Ueberschiebungen von gleicher Zusammenfassung der Formen und von gleichem Gewichte werden in ihrer Gesamtheit eine "Gruppe" genannt. Beispielsweise giebt es für das Gewicht 3 die folgenden drei Gruppen

$$\begin{array}{llll}((f_1,f_2)_3,f_3)_0, & ((f_1,f_2)_2,f_3)_1, & ((f_1,f_2)_1,f_3)_2, & ((f_1,f_2)_0,f_3)_3,\\ ((f_1,f_3)_3,f_2)_0, & ((f_1,f_3)_2,f_2)_1, & ((f_1,f_3)_1,f_2)_2, & ((f_1,f_3)_0,f_2)_3,\\ ((f_2,f_3)_3,f_1)_0, & ((f_2,f_3)_2,f_1)_1, & ((f_2,f_3)_1,f_1)_2, & ((f_2,f_3)_0,f_1)_3.\end{array}$$

Was den Zusammenhang zwischen jenen Formen anbetrifft, so folgt ohne Schwierigkeit der Satz: Die Ueberschiebungen jeder zu drei Formen gehörigen Gruppe sind unter sich linear unabhängig, und jede Ueberschiebung einer Gruppe kann durch diejenigen jeder anderen zugehörigen Gruppe linear ausgedrückt werden. Genau der entsprechende Satz gilt für beliebig viele Formen $f_1,f_2,\dots,f_varrho$. Auch die Anzahl der Formen einer Gruppe wird bestimmt; sie ist nur von dem Gewichte g und von den Ordnungen $n_1,n_2,\dots,n_\varrho$ jener Formen abhängig, also für alle zusammengehörigen Gruppen die nämliche und ergiebt sich als der Coefficient von x^g in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\frac{(1-x^{n_1+1})(1-x^{n_2+1})\dots(1-x^{n_\varrho+1})}{(1-x)^{\varrho-1}}.$$

Bisher wurden nur sogenannte "einfache" Ueberschiebungen betrachtet, d. h. solche, in denen jede Form f nur einmal vorkommt. Indem der Verfasser mehrere Formen f einander gleichsetzt, ergeben sich entsprechende Sätze für sogenannte "mehrfache" Ueberschiebungen, in denen jede Form wiederholt auftritt. Aus diesen Entwickelungen, in denen insbesondere auch auf die Theorie der Sylvester'schen Syzyganten eingegangen wird, seien folgende beiden Sätze erwähnt: Zu jeder invarianten Form K einer binären Form f von höherem als dem 3^{ten} Grade in den Coefficienten gehört eine Syzygante, welche das Glied Kf^2 enthält. Zu jeder invarianten Form A 3^{ten} Grades, welche nicht Functionaldeterminante ist, gehört eine Syzygante, die den Term Af^3 enthält. Als Beispiel für die entwickelte Methode giebt der Verfasser das volle System der irreduciblen Syzyganten für die 23 Invarianten und Covarianten einer binären Form 5^{ter} Ordnung. Die Zahl der Syzyganten dieses Systems ist 18.

Reviewer: Hilbert, Dr. (Königsberg i.Pr.)

Full Text: DOI EuDML