Pincherle, S.
On generalized hypergeometric functions. (Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate.) (Italian) JFM 20.0432.01
Rom. Acc. L. Rend. (4) IV, No. 1, 694-700, 792-799 (1888).

Bekanntlich entspricht jeder linearen homogenen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten eine ebensolche Differenzengleichung, deren Lösung zugleich die Lösung der ersteren Gleichung ergiebt. Setzt man in der Differentialgleichung e^{-t} für die unabhängige Variable und $\psi(t)$ für die abhängige Variable, so wird sie von der Gestalt

$$(1)\quad \sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{p} a_{h,k}e^{-kt}\psi^{(h)}(t)=0,$$

wo $a_{h,k}$ Constanten bedeuten. Die entsprechende Differenzengleichung lautet dann

$$(2)\quad \sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{p} a_{h,k}(x+k)^h f(x+k)=0,$$

wo $f(x)$ die abhängige und x die unabhängige Variable bezeichnet.

Die Uebergang von dem Integrale der einen Gleichung zu dem der anderen wird vermittelt durch die Formeln

$$(3)\quad f(x)=\int e^{-xt}\psi(t)dt;\quad \psi(t)=\int e^{xt}f(x)dx,$$

wobei die Integrationswege in geeigneter Weise zu wählen sind. Der Verfasser betrachtet nun zuerst den Fall $m=1$, p beliebig. In diesem Falle ist die Gleichung (1) sofort integrirbar; es ist nämlich

$$\psi(t)=e^{-\beta t}\prod_{k=1}^{p}(1-\alpha_k e^t)^{\beta_k},$$

wo α_k und β_k Constanten bedeuten. Die erste Formel (3) liefert sodann die Lösung der Differenzengleichung (2) in Gestalt eines bestimmten Integrals. Fasst man dann diese Lösung $f(x)$ als Function von $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ auf, so befriedigt dieselbe eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen. Als Function von α_1 betrachtete, genügt $f(x)$ jener linearen Differentialgleichung, welche Herr Pochhammer als eine Verallgemeinerung der hypergeometrischen Differentialgleichung untersucht hat. In dem Falle $p=3$, $\alpha_1=1$ geht $f(x)$ in die von Appell und Picard untersuchten hypergeometrischen Functionen von zwei Variabeln α_2,α_3 über.

In der Fortsetzung seiner Abhandlung betrachtet der Verfasser den Fall, wo in den Gleichungen (1) und (2) die Zahl $p=1$, dagegen m beliebig ist. Dann lässt sich das Integral der Gleichung (2) sofort angeben; dasselbe lautet nach den Untersuchungen von Mellin

$$f(x)=c^x\prod_{\nu+1}^{m}\frac{\Gamma(x-\varrho_\nu)}{\Gamma(x-\sigma_\nu)},$$

wo $\Gamma(x)$ das Euler'sche Integral und ϱ_ν, σ_ν, c Constanten bezeichnen.

Aus $f(x)$ ergiebt sich nach Formel (3) $\psi(t)$ in Gestalt eines bestimmten Integrals. Als Function $\varrho_1,\varrho_2,\dots,\varrho_m$ aufgefasst, befriedigt $\psi(t)$ lineare Differentialgleichungen. Specielle Fälle von den letzteren sind die 15 Gauss'schen "Relationes inter functiones contiguas", sowie die von Goursat herrührenden Verallgemeinerungen dieser Relationen. Der Verfasser macht zum Schluss auf die Dualität aufmerksam, welche seine Betrachtungen beherrscht, und setzt dieselbe durch in ein helles Licht, dass er entsprechende Sätze einander gegenüber stellt.

Reviewer: Hurwitz, Prof. (Königsberg i.Pr.)

MSC:

33C99 Hypergeometric functions | Cited in **3** Documents

Keywords:

Hypergeometric functions. Difference equations associated with linear differential equations