Kiepert, L.

On the transformation of the elliptic functions under composite transformation degrees. (Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade.) (German) JFM 20.0466.01

Math. Ann. XXXII, 1-135 (1888).

Es ist bekannt, dass man eine Transformation vom Grade ab erhält, wenn man nach einander eine Transformation a^{ten} Grades und eine b^{ten} Grades ausführt. Aus diesem Grunde hat man sich bisher meist bei der wirklichen Ausführung der Rechnungen auf Transformationen, deren Grad eine Primzahl ist, beschränkt, zumal der Grad der Modulargleichung bei zusammengesetzten Transformationen noch schneller wächst, als der Transformationsgrad. Herr Kiepert zeigt nun im Vorliegenden, dass diese Beschränkung auf Primzahlgrade auch ihre Nachteile hat. Es lassen sich nämlich die algebraischen Beziehungen, auf welche es hier lediglich abgesehen ist, für den zusammengesetzten Transformationsgrad bei directer Behandlung mit weit einfacheren Mitteln gewinnen als auf dem bisherigen Umwege. Wir wissen, dass zwischen der absoluten Invariante

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

der ursprünglichen elliptischen Function und der absoluten Invariante $\overline{J}$ der tranformirten Function eine Gleichung besteht, deren Rang ϱ (das Riemann'sche p) leicht bestimmt werden kann und im Verhältnis zum Grade dieser Gleichung klein ist. Daher muss es auch Hülfsgrössen ξ geben, die rationale Functionen von J und $\overline{J}$ sind und die Eigenschaft haben, dass die Gleichungen zwischen ξ und J, resp. ξ und $\overline{J}$:

$$(1) \quad F(\xi, J) = 0, \quad F_1(\xi, \overline{J}) = 0$$

in Bezug auf J und $\overline{J}$ von niedrigerem Grade sind, als die Invarianten Gleichung zwischen J und $\overline{J}$. Für den Fall $\varrho = 0$ vergleiche die Arbeiten von F. Klein (Math. Ann. XIV. 111-172; s. F. d. M. X. 1878. 69, JFM 10.0069.01) und Gierster (ib. 537-544). Für $\varrho = 1$ giebt es sogar Hülfsgrössen, für welche die Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\overline{J}$ nur noch vom zweiten Grade sind. Durch Mittel, welche die Theorie der elliptischen Functionen selbst lieferte, ist es Herrn Kiepert gelungen, auf rein algebraischem Wege eine solche Hülfsgrösse ξ für $\varrho = 1$ und höhere Werte von ϱ zu finden, die er als "Parameter" bezeichnet. Der Grad der Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\overline{J}$ heisst der "Charakter" des Parameters ξ. Bei zusammengesetztem Transformationsgrade ist es nun gar nicht nötig, die Gleichungen (1) herzustellen; man kann mehrere Parameter mit möglichst niedrigem Charakter bilden, die Form der Gleichungen, welche zwischen je zweien unter ihnen besteht, feststellen und die noch unbestimmten Zahlcoefficienten dadurch ausrechnen, dass man die beiden Parameter nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{2}{n}} = z$ entwickelt.

Diese Methoden werden im ersten Teile (Abschnitt 1 und 2, S. 8-54) entwickelt und die allgemeinen Eigenschaften der Transformationsgleichungen sowie der Parameter gewonnen. Der zweite Teil enthält die Anwendungen auf besondere Transformationsgrade. Und zwar werden im dritten Abschnitt die Transformationen vom Grade 2, 4, 8, 16 und allgemein 2^a erledigt, im vierter folgen die Grade 3, 9, 27, 81, 343 und 3^a; die Potenzen der Primzahlen a, die von 2 und 3 verschieden sind, besonders $5, 5^2, 5^3, 7, 7^2$, folgen im fünften Abschnitt. Der sechste Abschnitt enthält die Transformationen vom Grade $2a$, besonders $n = 6, 10, 14, 22$ und 26. Mit Hülfe der Transformation vom Grade 22 liess sich auch der Fall $n = 11$ erledigen, was deutlich zeigt, dass die Lösung für zusammengesetzte Transformationen die für Primzahltransformationen erleichtert. Abschnitt 7 behandelt den Grad von der Form $4a$, insbesondere $n = 12, 20$ und 28; Abschnitt 8 die Formen $8a, 16a$ und allgemein $2^a a$ mit den besonderen Fällen $24, 48, 96, \ldots, 40, 80, \ldots$ Im neunten Abschnitt folgen die Grade $3a$, besonders 15, 21; im zehnten die Grade $9a$, besonders $n = 18$ und $n = 45$; und der letzte Abschnitt erläutert die Transformation $6a^{\text{ten}}$ Grades durch das Beispiel $n = 30$.

Reviewer: Müller, F., Prof. (Berlin)

MSC:

11F32 Modular correspondences, etc.
11F11 Holomorphic modular forms of integral weight

Keywords:

modular equation; modular forms

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Die BezeichnungJ ist von Herrn Klein in seiner Abhandlung: ?Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Anflösung der Gleichungen fünften Grades? (Math. Annalen, Band XIV, S. 111?172) eingeführt worden. Dabei ist \$\$J = \(\backslash\)frac\{\{g_2 \^3 \}\}\{\{g_2 \^3 - 27g_2 \^3 \}\},\$\$ wog 2 undg s die von Herrn Weierstrass benutzten Invarianten sind.

[2] Die zahlreichen weiteren Arbeiten, welche Herr Klein und seine Schüler über Transformation der elliptischen Functionen veröffentlicht haben (vergl. insbesondere das Referat in Bd. 26 dieser Annalen, S. 455?464), kommen für diese Entwicklungen nicht unmittelbar in Betracht, insofern es sich in ihnen nur ganz beiläufig um die Aufstellung der zwischenJ und \$\$\(\backslash\)bar J\$\$ bestehenden Gleichung handelt. Immerhin besteht zwischen diesen Arbeiten und meiner Untersuchung eine Uebereinstimmung im Princip: hier wie dort handelt es sich darum, bei der Construction von Gleichungssystemen auch im Falle höheren Ranges den Anschluss an die Theorie der algebraischen Functionen zu bewahren, andererseits geeignete Irrationalitäten der eigeutlichen Theorie der elliptischen Functionen zu entnehmen. Vergl. insbesondere die Dissertation von Herrn Fricke (Leipzig 1886):Ueber Systeme elliptischer Modulfunctionen von niederer Stufenzahl.

[3] Aus einer mündlichen Mittheilung des Herrn Weierstrass schliesse ich, dass er bei seinen eigenen, nicht veröffentlichten Untersuchungen über die Transformation der elliptischen Functionen vermuthlich denselben oder doch einen ähnlichen Ausdruck wie ? (u) benutzt. Nach den Bezeichnungen von Jacobobi (ges. Werke, Bd. 1, S. 501) wird \$\$\(\backslash\)tau (u|\(\backslash\)varpi ,\(\backslash\)varpi ') = (\(\backslash\)frac\{\(\backslash\)pi \}\{\(\backslash\)varpi \})\^\{\(\backslash\)frac\{1\}\{2\}\} \(\backslash\)frac\{1\}\{\{Q(\(\backslash\)varpi ,\(\backslash\)varpi ')\^3 \}\}\(\backslash\)vartheta _1 \(\backslash\)left(\{\(\backslash\)frac\{u\}\{\{2\(\backslash\)varpi \}\},e\^\{\(\backslash\)frac\{\{\(\backslash\)tilde \(\backslash\)omega '\(\backslash\)pi i\}\}\{\{\(\backslash\)tilde \(\backslash\)omega \}\}\} \} \(\backslash\)right).\$\$

[4] Vergl. Felix Müller, de transformatione functionum ellipticarum. Berlin 1867.

[5] Dieser Ausdruck ist schon in Gleichung (13) m. vor. Abh. erklärt worden.

[6] Vergl. Journal für Mathematik, Bd. 87, S. 199?216, Bd. 88, S. 205?212 und Bd. 95, S. 218?231. Math. Annalen, Bd. 26, S. 369?454.

[7] Dieser Paragraph enthält zum Theil Untersuchungen, welche in ähnlicher Weise schon von den Herren Dedekind (Journal für Mathematik, Bd. 83), Gierster und Hurwitz (Mathematische Annalen) und H. Weber (Acta mathematica, Bd. 6) ausgeführt sind.