Dyck, W.
Beiträge zur Analysis situs. I. (German) JFM 20.0519.04
Math. Ann. XXXII, 457-513 (1888).

Diese Arbeit enthält eine weitere, systematische Ausführung der vom Verfasser bereits früher in den Grundzügen und Hauptresultaten mitgeteilten Theorie des Zusammenhanges von Curven und Flächen, über welche in diesem Jahrbuch (XVII. 1885. 523, JFM 17.0523.02 und XVIII. 1886. 454, JFM 18.0454.01) von anderer Seite berichtet wurde. Es kann mithin für das Verständnis des Zweckes und der Grundgedanken dieser Untersuchungen auf jene Referate, insbesondere das zweite, verwiesen werden. – Aus der in der Einleitung gegebenen Literatur-Uebersicht geht zunächst hervor, wie ungemein zahlreich und mannigfach die Resultate sind, welche der Verfasser hier unter einheitlichen Gesichtspunkten vereinigt. Die Hauptaufgabe, nämlich Bestimmung der Charakteristik eines Gebildes, wird der Reihe nach für ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten behandelt. In beiden Fällen wird zuerst rein geometrisch untersucht, durch welche allgemeinen gestaltlichen Unterschiede und in welcher Weise die Charakteristik der Curven oder Flächen beeinflusst wird; dann wird gezeigt, wie auch für analytisch gegebene Gebilde die Charakteristik gefunden werden kann.

Insofern die Theorie sich auf Curven bezieht, wird ein begrenztes Curvenstück "Elementargebilde" (E^{I}) genannt, und der Inbegriff einer beliebigen Anzahl von Elementargebilden und von geschlossenen Curvenzügen, welche durch Verbindung der Endpunkte einzelner oder mehrerer Elementargebilde entstanden sind, "eindimensionale Mannigfaltigkeit" (M^{I}). Die Charakteristik von M^{I} ist dann gleich der Anzahl der vorhandenen offenen Curvenzüge. Ist analytisch eine Curve $\psi(x,y)$ und ein Curvensystem $\Phi(x,y,\lambda)$ gegeben, so wird die Charakteristik derjenigen Teile einer Curve Φ, welche im Innern von ψ liegen, bei stetiger Aenderung von λ sich immer dann ändern, wenn an irgend einer Stelle von ψ eine Berührung mit Φ eintritt. Die Zu- oder Abnahme der Charakteristik an solcher Stelle entscheidet über den (Kronecker'schen) Punktcharakter derselben. Und von der für irgend einen Wert von λ bekannten Charakteristik aus kann man durch die Verfolgung der Aenderungen, welche dieselbe an den "Sprungstellen" erleidet, während λ abnimmt, auch die gesuchte Charakteristik für die dem Werte $\lambda = 0$ entsprechende Curve φ finden. Eine Formel liefert sodann für alle Berührungsstellen die Punktcharaktere, durch deren Addition die gestellte Aufgabe gelöst wird. Ein specielles Beispiel erläutert das Verfahren.

Im Gebiet der Flächen ist das Elementargebilde (E^{II}) ein in der Ebene ausbreitbares begrenztes Flächenstück, und die Mannigfaltigkeit M^{II} entsteht durch Zusammensetzung von Elementargebilden längs gewisser Randstücke oder geschlossener Randcurven, eventuell schematisch durch blosse Zuordnung von Randstücken. Durch Zusammensetzung unendlich vieler und unendlich kleiner Elementargebilde entsteht die allgemeinste Form der M^{II}. Bildet dieselbe eine zusammenhängende Fläche, so ist zwischen Flächen mit umkehrbarer und nicht umkehrbarer Indicatrix zu unterscheiden. Aus den von Möbius aufgestellten "Grundformen" ergeben sich dann für beide Fälle "Normalformen", und demnächst einfache Definitionsgleichungen für die Charaktiristik. Es werden darauf die Beziehungen der Charaktiristik zur Riemann'schen Zusammenhangszahl und anderen Abzählungen festgestellt, wobei die geometrische Bedeutung der Charakteristiken-Theorie auf verschiedene Arten hervortritt. Sie liefert die Bedingungen für die umkehrbar eindeutige stetige Abbildung zweier Flächen auf einender und ermöglicht die vollständige Beschreibung einer Fläche im Sinne der Analysis situs bezüglich ihrer absoluten Eigenschaften. – Die analytische Bestimmung der Charakteristik für Fläche ohne Singularitäten erfolgt im wesentlichen nach der für die Curven massgebenden Methode; natürlich gestalten sich die Vorkommnise, welche auf die zur Besimmung des Punktcharakters der Sprungstellen nötigen Abzählungen Einfluss haben, hier complicirter. Es werden drei verschiedene Abzählungen ausgeführt von denen die letzte einerseits specialisirt, andererseits verallgemeinert wird. Entweder nämlich vaiirt die Fläche $\Phi = 0$ bei constantem Innenraum von $\psi = 0$, oder der Innenraum von $\Psi = 0$ bei constanter Fläche $\varphi = 0$, oder eine Fläche $X = 0$ bei constanter, aus $\varphi = 0$ und $\psi < 0$ gebildeter Mannigfaltigkeit. Zur Erläuterung des Vorhergehenden werden analytische Beispiele für die Summation der Punktcharaktere gegeben, wobei die Uebereinstimmung der Resultate mit der Kronecker'schen Charakteristik und demnach mit der Gauss'schen Curvatura inegra überall hervortritt. Zuletzt werden auch die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix, bei welchen Doppelcurven auftreten, betrachtet, und auf die Charakteristik festgestellt. Auch diese Theorie wird durch ein

Beispiel erläutert, und zum Schluss die Ausdehnung dieser Untersuchungen auf drei- und mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten in Aussicht gestellt.

Reviewer: Schlegel, Dr. (Hagen)

Full Text: DOI

References:

[1] Picard, ?Sur les fonctions hyperabéliennes?. Liouville, Journal de math. Se. IV, Bd. 1, p. 106. (1885). · Zbl 17.0298.02