Darboux, G.

**Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Teil 1 u. 2.** (French) JFM 19.0746.02

Paris. Gauthier-Villars. 1887-89 (1887,1889).

Der um die Infinitesimalgeometrie hoch verdiente Meister hat durch die Herausgabe dieser Vorlesungen ein Lehrbuch geschaffen, welches bestimmt erscheint, auf lange Zeit hinaus die Schritte der Geometer zu leiten. Sein bewundernswerter Fleiss und seine umfassendste Kenntnis alles bisher auf dem behandelten Gebiete Geleisteten werden dem vollendeten Werke, von dem bisher zwei Teile erschienen sind, den Wert einer fast selbstständigen Bibliothek der Infinitesimalgeometrie verleihen. Auf jeder Seite, und auch da, wo der Verfasser Bekanntes abhandelt, findet der Leser überraschend elegante Darlegungen und Wendungen, so wie eine Fülle originaler Gedanken. Bei dieser Sachlage würde eine eingehende Besprechung des nicht genug zu empfehlenden Werkes einen Raum beanspruchen, der den an dieser Stelle zu Gebote stehenden weit überschreiten müsste. Wir können uns daher nur auf eine kurze andeutende Inhaltsangabe beschränken.

Der erste Teil des Werkes zerfällt in drei Bücher von neun, acht und zwölf Capiteln. Das erste Buch behandelt die Anwendungen der Geometrie auf die Theorie der relativen Bewegungen. Als Grundlage der Theorie der krummen Linien und Flächen giebt der Verfasser eine Reihe von Sätzen über die Bewegung eines festen Trieders, bei welcher die drei Rotationscomponenten und die Geschwindigkeitscomponenten der Eckpunkte als Functionen eines oder zweier Parameter gegeben gedacht werden. Er zeigt auf eleganteste Weise, dass bei dieser Angabe die Ermittelung der Richtungscosinus der Triederkanten auf die Integration einer allgemeinen Riccati'schen Gleichung zurückgeführt werden kann, und giebt eine Menge interessanter Anwendungen des Vorgetragenen. Darauf wendet er sich zu den krummlinigen Coordinaten und zu den Flächen, die durch kinematische Eigenschaften definirt werden, giebt die Sätze von Bour über die Schraubenflächen und die weiter gehenden von Maurice Lévy, so wie Sätze über die durch Bewegung fester Curven erzeugten Flächen.

Im zweiten Buche werden verschiedene Systeme krummliniger Coordinaten behandelt. Zunächst diejenigen, welche zu einem System conjugirter Linien einer krummen Fläche führen, in welche ein Theorem von Königs einführt. Darauf folgen allgemeine und umfangreiche Betrachtungen über Krümmungslinien und asymptotische Linien. Alsdann die orthogonalen und isothermen Systeme und ein ausgezeichnet schönes Capitel über conforme Abbildung. Weiter wird das durch die Krümmungslinien gegebene Orthogonalsystem behandelt und die Theorie der pentasphärischen Coordinaten angeknüpft. Es folgt eine meisterhafte Darstellung der Theorie der Tangentialcoordinaten (Ebenencoordinaten der Tangentialebene) sowie eine Reihe interessanter Anwendungen.

Im dritten Capitel wendet sich Hr. Darboux zu den Minimalflächen. Nach einer vortrefflichen historischen Einleitung in die Theorie folgen die in eleganter und eigenartiger Form dargelegten Formeln von Weierstrass und der Zusammenhang derselben mit den Functionen eines complexen Arguments.

Es werden weiter Sätze von Minding, Bour, Bonnet und Enneper'sche Flächengattungen besprochen, die Bonnet'schen adjungirten Flächen und deren Schwarz'sche Verallgemeinerung.

Daran schliesst sich die Mitteilung der Lie'schen Untersuchungen, seine schöne Entdeckung der Doppelflächen und eine Betrachtung über Flächen, die nur eine Seite darbieten. Die bisher bekannten Untersuchungen über algebraische Minimalflächen werden in grosser Vollständigkeit mitgeteilt. Darauf folgen die Schwarz'schen Formeln für die Bestimmung einer Minimalfläche, welche eine gegebene Curve enthält und in jedem Punkte derselben eine gegebene Tangentialebene besitzt. Demnächst kommen einige Sätze von Lie, die sich auf Eigenschaften algebraischer Minimalflächen beziehen, zur Besprechung. Die Arbeiten von Riemann, Schwarz und Weierstrass über Minimalflächenstücke, die durch geradlinige Contouren vollständig begrenzt werden, werden in eigenartigster Weise dargestellt und weitere Anwendungen der Theorien dieser Geometer gegeben.

Hiermit schliesst die ausgezeichnete Darstellung der Theorie der Minimalflächen, die mit Ausnahme der Untersuchungen über die Grenzen, innerhalb deren Minimalflächenstücke wirkliche Minima darstellen, alles bisher auf diesem Gebiete Geleistete besprochen hat. Der zweite Teil des Werkes (1889 erschienen) beginnt mit einer Darstellung der Theorie der Congruenzen, die in wichtigem und elegantem Uebergang geradezu in die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung einführt, und zwar in die Laplace'sche Methode der Integration derselben. Die neuen Untersuchungen, welche der Verfasser im zweiten Capitel des vierten Buches mitteilt, gehören zu den schönsten und fruchtbarsten, welche bisher in der Theorie dieser Differentialgleichungen veröffentlicht worden sind, und geben einen neuen Beweis der hohen Meisterschaft des Verfassers. Sie erledigen die Frage nach den durch die Laplace'sche Methode integrirbaren Differentialgleichungen endgültig, eine Frage, die von Moutard schon für gewisse Formen derselben mit Erfolg behandelt worden war. Wir bedauern, eine ausführliche Darstellung dieser schönen und umfassenden Untersuchungen hier nicht geben zu können.

Hierauf wendet sich Hr. Darboux zu der Behandlung der Differentialgleichung zweiter Ordnung mit reellen Charakteristiken, von der ein besonderer Fall schon durch Euler bei seinen Untersuchungen über Schallfortpflanzung behandelt wurde, und geht dazu über, einen Gedanken von Riemann, der die Integration dieser Gleichung in seiner berühmten Abhandlung über die Fortpflanzung von Luftwellen von endlicher Schwingungsweite gegeben hat, in wahrhaft meisterhafter Weise darzustellen und weiter zu führen. Auch hier müssen wir es uns versagen, eine ausführlichere Besprechung der wichtigen Darlegungen zu geben, die von jedem Freunde mathematischer Wissenschaften gelesen werden sollten. Bei der Riemann'schen Integrationsmethode spielt die Lagrange'sche Adjungirte der zu behandelnden Differentialgleichung eine wesentliche Rolle. Beide Differentialgleichungen sind gleichzeitig integrirbar, die eine durch die Integration der anderen. Hr. Darboux fasst den von Riemann kaum angedeuteten Zusammenhang in seiner vollen Allgemeinheit ins Auge und beschäftigt sich daher mit den allgemeinen Eigenschaften der Lagrange'schen Adjungirten in eigenartiger und elegantester Darstellung. Nach der Untersuchung in Beziehung auf gewöhnliche Differentialgleichungen, wendet er sich zu den Analogien bei den linearen partiellen Differentialgleichungen und speciell denen zweiter Ordnung mit zwei Variabeln. Das sechste Capitel des vierten Buches bringt eine Vervollständigung der Untersuchungen über die Laplace'sche Integrationsmethode und endigt mit einer directen Berechnung der Invarianten, welche den nach dieser Methode zu bildenden Reihen von neuen linearen Differentialgleichungen entsprechen, und der Angabe der vollständigen Lösung jeder dieser Differentialgleichungen. Auch hier ist es nicht möglich, die ganze Fülle des wichtigen mitgeteilten Stoffes auch nur anzudeuten.

Das siebente Capitel beschäftigt sich mit den Differentialgleichungen, deren Invarianten gleich sind, deren Integral, wenn es durch die Methode von Laplace überhaupt erlangt werden kann, explicite gegeben wird. Zusammenhang mit den Untersuchungen von Moutard. Von hohem Interesse und grosser Wichtigkeit ist das achte Capitel, welches die Zurückführung der Integration linearer partieller Differentialgleichungen auf andere behandelt, derart, dass an jede lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung eine Reihe von ebensolchen Gleichungen geknüpft ist, deren jede mit der ursprünglichen gleichzeitig integrabel ist.

Das neunte Capitel behandelt eine besondere Klasse der Differentialgleichungen von gleichen Invarianten, die Hr. Darboux harmonische Gleichungen nennt, eine Klasse, die bei geometrischen und mathematisch-physikalischen Problemen häufig auftritt. In Beziehung auf sie giebt Hr. Darboux tiefe und wichtige Studien von überraschender Eleganz, die die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mannigfach bereichern und die grösste Aufmerksamkeit der Geometer verdienen. Gleiches gilt von den, geometrische Anwendungen enthaltenden, Capiteln X-XV des vierten Buches.

Das fünfte Buch des Werkes handelt von den auf krummen Flächen gezogenen Linien und bringt zunächst die Formeln von Codazzi und eine Reihe von Anwendungen derselben. Er entwickelt weiter die Krümmungs- und Torsionsverhältnisse der auf Flächen gezogenen Linien und Sätze von Laguerre, Bonnet, Beltrami, Enneper.

Das sechste Buch geht über zur Theorie der geodätischen Linien der krummen Flächen, die Hr. Darboux wiederum in vollendeter Weise vorträgt und wesentlich bereichert. Der Zusammenhang der Theorie der geodätischen Linien mit einem besonderen Fall der Bewegung eines Punktes auf einer krummen Fläche giebt ihm Gelegenheit, an die allgemeinsten Transformationen der Gleichungen der Dynamik elegante und wichtige Untersuchungen anzuschliessen, die wertvolle Anwendungen auf geometrische Probleme ermöglichen. Auch über diese hervorragenden Untersuchungen, welche den zweiten Teil des Werkes endigen, Ausführlicheres mitzuteilen, erlaubt uns der beschränkte Raum unseres Referates nicht.

Wie schon im Anfange bemerkt, und wie wir am Schlusse wiederholen, würde eine alle Teile des ausgezeichneten Werkes würdigende ausreichende Besprechung selbst auf den Umfang eines Buches anwachsen müssen. Wir mussten uns darauf beschränken, nur den tiefen Eindruck anzudeuten, den das Darboux'sche Werk, dessen Fortsetzung wir mit Spannung entgegensehen, auf uns gemacht hat.

Reviewer: Weingärtner, Prof. (Berlin)