Picard, E.

Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce. (French)

JFM 17.0332.03
Jordan J. (4) I, 281-346 (1885).

Die Abhandlung bringt in ausführlicher Darstellung die schon in kurzen Noten (in den C. R. IC. vgl. F. d. M. XVI. 1884. 293-296, JFM 16.0293.01, JFM 16.0296.01) veröffentlichen Untersuchungen über die Integrale erster Gattung, welche sich auf eine algebraische Fläche beziehen. Betrachtet man auf einer Fläche m^{ten} Grades $f(x,y,z)=0$ Integrale von der Form

$$(1) \qquad \int \{P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy\},$$

in welchen der Ausdruck unter dem Integralzeichen (z als Function von x und y betrachtet) ein totales Differential ist, so ergiebt sich zunächst, dass für eine allgemeine Fläche m^{ten} Grades keine überall endlichen Integrale existiren. Vielmehr kommt es darauf an, für $f(x,y,z)=0$ Polynome A, B, C von x, y, z zu finden, von der Form:

$$(2) \qquad \begin{cases} A = x.\varphi + A_1, \\ B = x.\varphi + B_1, \\ C = x.\varphi + C_1, \end{cases}$$

wo φ eine ganze homogene Function $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, A_1, B_1, C_1 ganze Functionen von höchstens $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung in x, y, z bedeuten), welche die Gleichung:

$$(3) \qquad A.\frac{\partial f}{\partial x} + B.\frac{\partial f}{\partial y} + C.\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) f(x,y,z)$$

identisch befriedigen. Dann ist das von einem Anfangswerte x_0, y_0, z_0 bis zu einem beliebigen Punkte x, y, z auf der Fläche ausgedehnte Integral

$$(4) \qquad \int \frac{Bdx - Ady}{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}}$$

ein überall endliches Integral. Die Flächen $A=0, B=0, C=0$ haben dabei in den singulären Stellen von $f=0$ gewisse Singularitäten. Sie haben nämlich in jedem Knotenpunkt p^{ter} Ordnung einen Knotenpunkt von der Ordnung $p-2$ und gehen durch jede k-fach zählende Curve von $f=0$ $(k-1)$-fach hindurch.

Nimmt man an, dass auf der Fläche $f=0$ mehrere von einander unabhängige Integrale erster Gattung existiren

$$\int \frac{Bdx - Ady}{f'_z} \quad \text{und} \quad \int \frac{B_1dx - A_1dy}{f'_z},$$

für welche also $BA_1 - AB_1$ für die Punkte der Fläche $f=0$ in allgemeinen von Null verschieden ist, so hat man aus der Gleichungen (3) für A, B bez. A_1, B_1 für die Punkte der Fläche $f=0$

$$Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = 0,$$
$$A_1f'_x + B_1f'_y + C_1f'_z = 0$$

und daraus

$$AB_1 - A_1B = f'_z.Q(x,y,z),$$
$$BC_1 - CB_1 = f'_x.Q(x,y,z),$$
$$CA_1 - AC_1 = f'_y.Q(x,y,z).$$

Die Fläche $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $Q=0$, "die zu f adjungirte Fläche" geht dann durch alle Curven der Ordnung p (der Fläche f) $(p-1)$-mal hindurch und hat in jedem p-fachen Knotenpunkt einen $(p-2)$fachen.

Weiter ist das Doppelintegral

$$\int^x \int^y \frac{Q(x,y,z)dxdy}{f'_z}$$

für alle Werte x, y endlich.

Auf specielle Flächen eingehend ergiebt sich: Die Flächen zweiter und dritter Ordnung besitzen keine Integrale erster Gattung, mit Ausnahme des Kegels dritter Ordnung, für welchen (den Coordinatenanfangspunkt als Kegelspitze genommen)

$$\int \frac{xdy - ydx}{f'_z}$$

sich als überall endliches Integral erweist. Flächen vierter und fünfter Ordnung können höchstens ein Integral ersten Gattung besitzen. Erst für Flächen sechster Ordnung ergiebt sich die Möglichkeit zweier unabhängiger, überall endlicher Integrale.

Die weitere Untersuchung betrifft eine Klasse algebraischer Flächen, für welche sich die Coordinaten eines Punktes durch eindeutige vierfach periodische Functionen zweier Parameter ausdrücken lassen, wobei noch die specielle (beispielsweise bei der Kummer'schen Fläche nicht erfüllte) Voraussetzung gemacht wird, dass bis auf Periodenvielfache jedem Punkte der Fläche nur ein einziges Wert-System der Parameter entspricht. Aus einer solchen Darstellung:

$$x = F(u,v), \quad y = F_1(u,v) \quad z = F_2(u,v)$$

ergiebt sich dann sofort die Existenz von zwei und nur zwei überall endlichen Integralen für diese Flächen. Es sind nämlich, wenn aus

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial F}{\partial u}\, du + \frac{\partial F}{\partial v}\, dv, \\ dy &= \frac{\partial F_1}{\partial u}\, du + \frac{\partial F_1}{\partial v}\, dv \end{aligned}$$

die Werte von du, dv folgen in der Form:

$$\begin{aligned} du &= Pdx + Qdy, \\ dv &= P_1 dx + Q_1 dy, \end{aligned}$$

die beiden Integrale

$$\int \{Pdx + Qdy\} \quad \text{und} \quad \int \{P_1 dx + Q_1 dy\}.$$

Es werden die Bedingungen untersucht, unter welchen eine Fläche $f = 0$ in der gemeinten Weise darstellbar ist; dabei erweisen sich Flächen sechster Ordnung als die niedrigsten, welche diese Parameterdarstellung zulassen.

Den Schluss bildet die Untersuchung der Differentialgleichungen von der Form

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

für welche F eine algebraische Relation bedeutet. Ist u eine eindeutige vierfach periodische Function von x, y, so existirt eine Relation der obigen Form zwischen u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Nun fragt sich umgekehrt, wie man erkennen kann, ob der obigen Differentialgleichung durch eine eindeutige, vierfach periodische Function u von x, y genügt werden kann. Damit ist die Erweiterung der bekannten Untersuchungen von Briot und Bouquet über die Auflösung der Differentialgleichung $f(u, \frac{du}{dz} = 0$ durch elliptische Functionen bezeichnet. Es wird gezeigt, dass in diesem Falle,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w$$

gesetzt, die Fläche

$$F(u,v,w) = 0$$

zu der soeben besprochenen Klasse algebraischer Flächen gehört.

Reviewer: Dyck, Prof. (München)