Weierstrass, C.

On Lindemann's paper: "On Ludolph's number". (Zu Lindemann's Abhandlung: "Über die Ludolph'sche Zahl".) (German) JFM 17.0414.01

Berl. Ber. 1885, 1067-1086 (1885).

Aus den Untersuchungen des Herrn Lindemann Berl. Ber. 1882 u. Klein Ann. XX. (siehe F. d. M. XIV. 1882. 369, JFM 14.0369.02, JFM 14.0369.03, JFM 14.0369.04) hat sich der bis dahin vergebens erstrebte Beweis ergeben, dass die Zahl π eine transcendente Zahl ist, dass also eine Quadratur des Kreises auf constructivem Wege nicht möglich ist. In Hinsicht auf dies allgemein interessante Resultat hat es Herr Weierstrass unternommen, eine möglichst elementar gehaltene, auch auf allbekannte Sätze sich stützende Begründung der Lindemann'schen Theoreme zu geben. Dieselbe beruht hauptsächlich auf folgendem Satz: "Es sei $f(z)$ eine ganze Function $(n+1)^{ten}$ Grades der Veränderlichen z mit gegebenen ganzzahligen Coefficienten, die so beschaffen sind, dass die Gleichung

$$f(z)=0$$

$(n{+}1)$ von einander verschiedene Wurzeln hat, welche mit $z_0, z_1, \dots, z_n$ bezeichnet werden mögen. Alsdann lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, auf mannigfaltige Weise ein System von $(n+1)$ ganzen Functionen $g_0(z), g_1(z), \dots, g_n(z)$ des Arguments z von nicht höherem als dem n^{ten} Grade, deren Coefficienten sämtlich ganze Zahlen sind, so bestimmen, dass erstens jede der Differenzen

$$g_\nu(z_0)e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda)e^{z_0} \qquad (\lambda = 0, 1, \dots, n;\ \nu = 0, 1, \dots, n)$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist, und zweitens die Determinante

$$|g_\nu(z_\lambda)| \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \dots, n)$$

einen von Null verschiedenen Wert hat." Dieser Satz wird in §1 bewiesen. Im folgenden Paragraphen ergiebt sich dann, dass π eine transcendente Zahl ist, aus dem Nachweis, dass das Product

$$\prod_{\lambda=1}^{r}(e^{x_\lambda}+1)$$

und somit auch jeder einzelne Factor desselben einen von Null verschiedenen Wert hat. Der letzte Paragraph enthält allgemeinere, auf die Exponentialfunction sich beziehende Sätze, aus denen u. a. folgende Sätze sich ergeben: "Die Exponentialgrösse e^x ist stets eine transcendente Zahl, wenn x eine von Null verschiedene algebraische Zahl ist", und : "Der natürliche Logarithmus einer algebraischen Zahl X ist immer eine transcendente Zahl, wenn X nicht den Wert 1 hat."

Reviewer: Müller, F., Prof. (Berlin)

MSC:

11J81 Transcendence (general theory)

Keywords:

Transcendence of π; Lindemann's theorem