

Kronecker, L.

Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. (German) JFM 16.0083.02
Berl. Ber. 1884, 1179-1193 (1884).

Im Anschluss an die Behandlung der Frage der Periodensysteme geht Herr Kronecker auf die Ergründung der näherungsweise ganzzahligen Lösungen der Systeme

$$(1) \quad \sum_{k=1}^q a_{ik} w_k = \xi_k, \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

ein, und er erledigt dieselbe vollständig durch den von ihm in seiner "Festschrift" eingeführten Begriff des Ranges r eines Systems (a_{ik}) . r ist die grösste Zahl von der Beschaffenheit, dass nicht alle aus den a_i zu bildenden Determinanten r^{ter} Ordnung verschwinden. Dann ist es klar, dass die Gleichungen (1) auch für die beliebigen Grössen w bei willkürlichen ξ nur erfüllbar sind, falls $p = i$ wird. Fordert man aber annähernde Lösung durch ganze Zahlen w , dann tritt der Begriff des "Rationalitäts-Ranges" τ von (a_{ik}) als notwendig hinzu. Die Bedeutung desselben und seine Aehnlichkeit mit dem absoluten Range erkennt man aus dem folgenden Satze: Das System (a_{ik}) vom Range r kann durch lineare Transformationen der Zeilen (mit irgend welchen Coefficienten) in ein solches verwandelt werden, welches nur r Zeilen hat, die nicht lauter Null-Elemente enthalten, und nur τ Zeilen, in denen nicht sämtliche Elemente ganze Zahlen sind. Dabei sind r und τ die kleinsten Zahlen, für welche dies möglich ist. Der Einfluss und die charakteristischen Eigenschaften dieser Zahlen r, τ auf (a_{ik}) werden nun eingehend untersucht. Nimmt man die erwähnten τ Zeilen als die ersten, so folgt, dass diese ersten τ Gleichungen des Systems (1) annähernd mit beliebiger Genauigkeit durch ganze Zahlen w gelöst werden können, die r ersten (linear unabhängigen) nur dann, wenn zwischen den ξ noch $r - \tau$ Relationen bestehen; und sollen alle p Gleichungen (1) annähernd befriedigt werden, dann sind ausserdem noch $p - r$ Relationen von den ξ zu erfüllen; und zwar so, dass $r - \tau$ lineare Functionen der ξ irgend welche ganzzahligen Werte, und $p - r$ andere lineare Functionen der ξ den Wert Null haben. Es können also τ von den Grössen ξ ganz beliebig angenommen werden; die Wahl von $r - \tau$ anderen wird dann bloss durch Rationalitäts-Beziehungen beschränkt, aber die noch verbleibenden $p - r$ Grössen ξ sind auch dem Werte nach durch die ersten r Grössen ξ vollständig bestimmt. In den ersten Paragraphen der Abhandlung werden die Fälle $q = 2$ und $q = 3$ eingehend durchgeführt, und damit wird nochmals in einfachster Weise die Frage nach den Periodensystemen beantwortet.

Reviewer: Netto, Prof. (Berlin)

Cited in **5** Reviews
Cited in **19** Documents