MacMahon, P. A.
On perpetuants. (English) JFM 16.0104.04
Sylv. Am. J. VII, 26-47 (1884).

(Siehe auch JFM 16.0104.01, JFM 16.0104.02, JFM 16.0104.03) Die neuere Theorie der Invarianten binärer Formen fällt geradezu mit der der symmetrischen Functionen zusammen. Um sich von der Ordnung der vorliegenden Form unabhängig zu machen, ordnet man nach steigenden Potenzen von x und führt die reciproken Wurzeln ein:

$$1+b\frac{x}{1}+c\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots=(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)\dots.$$

Dann sagt der von Herrn MacMahon aufgestellte Fundamentalsatz aus, dass jede (ganze) symmetrische Function der $\alpha,\beta,\gamma,\dots$, welche dieselben von höherem als ersten Grade enthält, bez. der Coefficienten $1,b,c,d,\dots$ eine Semiinvariante darstellt.

So z. B.

$$2=\sum\alpha^2=-(c-b^2),\quad 3=\sum\alpha^2=-\tfrac{1}{2}(d-3bc+2b^3)\,\text{etc.}$$

Herr Cayley wendet sich daher den symmetrischen Functionen der $\alpha,\beta,\gamma,\dots$ zu und untersucht die Gesetze, denen die sie repräsentirenden "Partitionssymbole", z. B. $6552=\sum\alpha^6\beta^5\gamma^5\delta^2$, unterliegen.

Es gilt die Multiplicationsregel:

$$l.m=(l+m)lm\quad\text{für}\,l\gtrless m$$

und

$$l.l=(2l)+2.ll\quad\text{für}\,l=m,$$

auf die sich ein besonders ausgebildeter Algorithmus stützt.

Diese Algorithmus ist einer Uebertragung in analytische Formeln fähig; man erhält z. B.

$$2^\alpha.2^\beta=\sum\frac{\alpha+\beta-2A}{\alpha-A.\beta-A}\cdot 4^A.2^{\alpha+\beta-2A},$$

wo A irgend eine ganze Zahl zwischen 0 und β ist.

Dann werden die Begriffe der "Capitation" und "Decapitation" eingeführt. Letztere führt z. B. das Symbol 6552 über in 552; erstere umgekehrt 552 in 5552, 6552, 7552 etc. Vermöge dieser Operationen kann man aus einer Formel (Identität, Syzygie) zwischen Symbolen eine Reihe neuer herleiten.

Unter den Semiinvarianten ragen an Wichtigkeit hervor die Sylvester'schen "Perpetuanten", die an die Ordnung der binären Form nicht gebunden sind, oder was dasselbe ist, die irreducible Semiinvarianten, d. i. solche, die sich nicht aus Semiinvarianten niederer Grade ganz zusammensetzen lassen.

Die Anzahl der Semiinvarianten für gegebenen Grad in den Coefficienten und gegebenes Gewicht bestimmt sich aus den "generating functions" (über welche man die früheren Berichte in den F. d. M. vergleiche). So ist die Anzahl für das Gewicht W und den Grad j der Coefficient von x^W in der Entwickelung des Bruches:

$$\frac{x^j}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^j)}.$$

Weit schwieriger ist es, eine entsprechende erzeugende Function für die Perpetuanten aufzustellen. Herr MacMahon erhält die Function;

$$\frac{x^{2^{j-1}-1}}{2\cdot 3\cdot 4\dots j}.$$

der Herr Cayley aber kein volles Vertrauen schenkt, da sie auf Principien beruht, die nicht völlig erwiesen sind. Für $j=2,3,4,5$ stimmt die Function mit der der directen Rechnung überein. Auch für $j=6$ noch, wie Herr MacMahon, über Cayley's Rechnungen hinausgehend, ausfürlich zeigt.

Die Tabellen, die beide Vefasser entwerfen, geben sowohl die Semiinvarianten und Perpetuanten bis zum Grad 6 und dem Gewicht 12 an, als auch die jedesmal bestehenden Syzygien. Die Tabellen des Herr Cayley empfehlen sich durch zweckmässigere Bezeichnung und übersichtlicheren Aufbau.

Auf die weitere Entwickelung der Theorie der Perpetuanten scheint die der Invarianten sich in Zukunft vornehmlich zu stützen.

Reviewer: Meyer, F. Prof. (Tübingen)

Full Text: DOI