Stéphanos, C.
Sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques. (French) JFM 15.0091.01
Klein Ann. XXII, 299-368 (1883).

Die Wichtigkeit der linearen Transformationen einer Variabeln hat den Herrn Verfasser veranlasst, ihnen eine besonders bequeme geometrische Interpretation unterzulegen.

Die Transformation lässt sich in der Gestalt schreiben:

$$A_{xy} \equiv a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = 0.$$

Dann deute man die $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}$ als homogene Coordinaten eines Raumpunktes.

Umgekehrt entspricht dann jedem Punkte eine bestimmte Homographie $A = 0$.

Die "involutiven Homographien" (Involutionen) entsprechen den Punkten einer Ebene π, entsprechend der Bedingung

$$J \equiv a_{12} - a_{21} = 0.$$

Dagegen sind die "singulären", d. h. in zwei lineare Factoren zerfallenden Homographien, für welche $\Delta a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, durch die Punkte einer "Fundamentalfläche" zweiter Ordnung S_2 repräsentirt. Denkt man sich beide Factoren (einen in x, den andern in y) abwechselnd variirend, so erhält man successive alle Geraden der beiden auf S_2 befindlichen (reellen oder nicht reellen) Geradenschaaren, die "Erzeugenden" g und die "Leitlinien" h. Für diesen Fall sind also $\frac{x_1}{x_2},\ \frac{y_1}{y_2}$ als die beiden Parameter eines Punktes der Fläche anzusehen. Diese beiden Parameter coincidiren nur für die gemeinsamen Punkte von S_2 und π, d. h. für die Punkte eines Kegelschnitts C_2. Es läuft somit neben der obigen Interpretation immer noch eine zweite: $A = 0$ stellt eine ganz bestimmte Homographie auf dem Kegelschnitt C_2 dar. Umgekehrt, ist eine solche auf C_2 gegeben, so kann man leicht den zugehörigen Raumpunkt construiren.

Dazu dient die Betrachtung zweier solchen Formen $A,\ B$, deren bilineare Invariante $\sum a_{ik}b_{ki}$ verschwindet, d. h. zweier conjugirten Formen. Die entsprechenden Punkte sind bez. S_2 conjugirt. Daraus folgt eine grosse Anzahl einfacher Constructionen.

So z. B. ist die identische Homographie dargestellt durch den Pol O von π bez. S_2. Zwei durch O und π harmonisch getrennte Punkte stellen zwei Homographien dar, von denen jede die inverse der andern ist.

Sind vier Formen eines Büschels gegeben:

$$A + \lambda_i B\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

so ist das Doppelverhältnis derjenigen (auf einer Geraden ligenden) Punkte y, die einem und demselben Punkte x entsprechen, dasselbe, nämlich das Doppelverhältnis der gegebenen Formen (und daher unabhängig vom Punkte x).

Ferner heisst der wichtige Satz, welcher das "Doppelverhältnis einer Homographie A" charakterisirt: "Die Gerade OA treffe die S_2 in den beiden Punkten $P,\ P'$. Diese bilden mit O und A dasselbe Doppelverhältnis, welches die "Fundamentalwerte" der Homographie A mit irgend einem Paar $x,\ y$ (und zwar jedem beliebigen) derselben bilden.

Der Sinn einer Homographie wird nach dem Vorzeichen der Discriminante Δ entschieden. Nach diesen Vorbereitungen wendet sich der Herr Verfasser zu dem "Producte" zweier und mehrerer Homographien (Substitutionen) $A.B = C$. Im besondern wird auch der Ausnahmefall berücksichtigt, dass C identisch verschwindet. Für den Punkt C werden Constructionen angegeben. Es genügt zu wissen, dass der Punkt $A.B = C$ auf der Geraden durch B liegt, welche diejenigen beiden "Erzeugenden" von S_2 trifft, welche den Geraden $OA,\ OB$ begegnen. (Das Analoge findet für den Punkt $B.A = C'$ statt.).

Ein gewisses Interesse bietet dabei einmal die Untersuchung der Frage, wie sich C mit einem der beiden Factoren ändert. Man hat z. B. "der Ort der Producte eines Punktes A mit den Punkten B von π ist die Polarebene von A bez. S_2".

Zweitens aber, was noch wichtiger ist, wie correspondiren A und B bei festem C? Die charakteristische Eigenschaft der so bestimmten Homographie (Collineation) ist die, die beiden Systeme von Regelschaaren auf S_2 zu vertauschen. (Solche Collineationen spielen nach Herrn Klein eine Hauptrolle bei den "Hauptgleichungen" fünften Grades).

Schliesslich gestatten auch die "transformirten" Punkte $A^{-1}BA$ eine sehr durchsichtige Behandlung.

Von diesen Dingen wird eine besonders interessante Anwendung ausgeführt auf die Drehungen des Raumes um einen festen Punkt O. Gewöhnlich behandelt man diese vom modernen Standpunkte aus in der Weise, dass man auf irgend einer reellen Kugel S_2 mit dem Mittelpunkte O das complexe Argument $z = x + iy$ aufträgt. Dann sind die Drehungen des Raumes um O identisch mit gewissen linearen Substitutionen von z. Die Behandlung des Herrn Verfassers ist auch schliesslich nur der Form nach von dieser Methode verschieden. Nimmt man nämlich die Kugel S_2 als Fundamentalfläche, die unendlich ferne Ebene als Ebene π (also den Kegelkreis C_∞ als Kegelschnitt C_2), so geht in der That die allgemeine Homographie über in eine solche auf dem Kreise C_∞, die andererseits immer durch eine bestimmte Rotation des Raumes um den festen Punkt O hervorgerufen wird. Definirt man als Aequator die zur Drehungsaxe senkrechte, durch O gehende Ebene, so schneidet dieser aus dem Kreise C_∞ die beiden Fundamentalpunte der zur Rotation gehörigen Homographie aus. Der Drehungswinkel ϑ ist mit dem Doppelverhältnis r der Homographie durch die bekannte Formel verknüpft:

$$\vartheta = ilgr.$$

Die weitere Durchführung, namentlich über den Sinn der auftretenden Drehungen, ferner von geometrischen Gebilden, wie: Gerade, Ebene, Kegel (mit der Spitze in O), etc. hat die grösste Aehnlichkeit mit der Entwickelung der von Staudt'schen Theorie des Imaginären.

Das Hauptrsultat lautet: "Eine Rotation A des Raumes um irgend eine (durch O gehende) Axe durch einen Drehwinkel ϑ hindurch ist hier repräsentirt durch denjenigen Punkt A der Axe, der von O (in richtigem Sinn genommen) den Abstand

$$R = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\vartheta$$

hat."

Sind dabei $\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3$ die Winkel der Axe mit drei durch O gehenden rechtwinkligen Coordinatenaxen $X,\ Y,\ Z$, so werden die bez. Coordinaten des Punktes A:

$$x = \cos\vartheta_1 \cot \tfrac{1}{2}\,\vartheta, \quad y = \cos\vartheta_2 \cot \tfrac{1}{2}\,\vartheta, \quad z = \cos\vartheta_3 \cot \tfrac{1}{2}\,\vartheta,$$

d. h. die Euler'schen Rotationsconstanten.

Man kann jetzt leicht Fragen behandeln, wie z. B.: welches sind die Rotationen, deren Punkte A eine Gerade resp. eine Ebene durchlaufen? wann sind zwei Rotationen conjugirt? etc. Als modernes Beispiel dienen diejenigen Rotationen, welche einen Würfel in sich selbst, d. h. drei durch O gehende rechtwinklige Axen in einander überführen. Es treten dabei drei, auch sonst vom Herrn Verfasser schon untersuchte "desmisch" verbundene Tetraeder auf, d. h. solche, die, als Flächen vierten Ordnung betrachtet, demselben Büschel angehören.

Eingehend wird auch die Zusammensetzung der Rotationen im Vergleich zu der Multiplication der entsprechenden Punkte studirt. So gelangt man mit Leichtigkeit zu dem von Halphén aufgestellten eleganten Satze:

"Drei gleiche Körper, die einen Raumpunkt O gemein haben, sind die Symmetriebilder eines und desselben vierten Körpers in Bezug auf drei durch O gehende Axen."

Zum Schluss werden noch den so behandelten Drehungen des Raumes, d. h. solchen Collineationen des Raumes, welche alle concentrischen Kugeln mit dem Centrum O in sich überführen (so dass die beiden Geradensysteme auf einer solchen Kugel jedes in sich übergehen), die sogenannten "Anastrophien" gegenübergestellt, die sich von jenen nur dadurch unterscheiden, dass bei ihnen diese beiden Geradensysteme sich immer vertauschen.

Reviewer: Meyer, F., Prof. (Tübingen)

Full Text: DOI