Picard, E.

On the functions of two independent variables which are analoguous to modular functions. (Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires.)

(French) JFM 15.0432.01
Act. Math. II, 114-135 (1883).

Man weiss, dass die bestimmten Integrale $\int_g^h \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$, worin g und h zwei der Grössen $0, 1, x, \infty$ bezeichnen, als Functionen von x einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, und falls ω_1 und ω_2 zwei passende Lösungen derselben sind, die Function x von u gegeben durch die Gleichung $\omega_2 : \omega_1 = u$ eindeutig ist und nur für die Halbebene auf der positiven Seite der reellen u-Axe definirt ist. Dieser Modularfunction der elliptischen Functionen analog werden eindeutige Functionen zweier Variablen definirt, zu denen man durch die Betrachtung der bestimmten Integrale

$$\int_g^h \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t-1)(t-x)(t-y)}}$$

geführt wird, worin g und h zwei der Grössen $0, 1, x, y, \infty$ bezeichnen. Diese genügen als Functionen von x und y nach einem allgemeineren vom Verfasser bewiesenen Satze (C. R. 1880 und Ann. de l'Éc. N. 1881; s. F. d. m. XII. p. 328, JFM 12.0328.02) einem System von drei simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen, die drei und nur drei gemeinsame linear unabhängige Lösungen haben. Wählt man drei zur algebraischen Gleichung zwischen z und t

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y),$$

deren Geschlecht drei ist, gehörige Abel'sche Integrale erster Gattung u_1, u_2, u_3, die so normirt sind, dass nach der Riemann'schen Bezeichnung der Periodicitätsmodul von u_μ an dem Schnitte a_μ gleich 1, an den übrigen Schnitten a gleich 0 ist, so hängen die 6 Periodicitätsmoduln an den Schnitten b nur von zwei Grössen u, v ab. Die quadratische Form $\Sigma m_\mu m_\nu \alpha_{\mu\nu}$, wo $\alpha_{\mu\nu}$ den imaginären Bestandteil des Periodicitätsmoduls von u_μ an dem Schnitte b_ν bezeichnet, muss definirt und negativ sein. Diese Bedingung reducirt sich auf die von den Werten u, v, wenn $u = u' + iu''$, $v = v' + iv''$ gesetzt wird, zu erfüllende Ungleichung:

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0.$$

Die Grössen u, v sind zwei Verhältnisse dreier bestimmten Integrale A_1, A_2, A_3, die lineare und homogene Combinationen von bestimmten Integralen der oben angegebenen Form sind, und ein Fundamentalsystem von Lösungen der erwähnten Differentialgleichungen darstellen. Die Wertänderungen, die u und v bei beliebigen Umläufen von x und y erfahren, werden, wie sich durch eine Untersuchung an den Integralformen selbst ergiebt, sämtlich erhalten, wenn man auf u, v die Substitutionen der Gruppe anwendet, deren Fundamentalsubstitutionen die drei folgenden sind:

$$U = \lambda^2 u - \lambda - 1, \qquad V = v + (\lambda - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2),$$
$$U = \lambda^2 u + 1 - \lambda^2, \qquad V = v + (1 - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2),$$
$$U = \frac{u}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v}, \quad V = \frac{\lambda v + \lambda^2 - 1}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v},$$
$$(\lambda \quad \text{eine kubische Wurzel der Einheit}).$$

Hieraus folgt dann, dass bei allen Substitutionen der Gruppe die Ungleichheit

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0$$

erhalten bleibt. Die Umkehrung der Gleichungen

$$\frac{A_3}{A_1} = u, \qquad \frac{A_2}{A_1} = v$$

mit Hülfe der θ-Functionen, die nur angedeutet wird, ergiebt x und y als eindeutige Functionen von u und v, welche für jedes System der unabhängigen Variablen u und v definirt sind, welche der obigen Ungleichheit genügen. Sie nehmen für alle Substitutionen der oben bezeichneten Gruppe denselben Wert an.

Reviewer: Hamburger, Prof. (Berlin)

MSC:

14K20	Analytic theory of abelian varieties; abelian integrals and differentials	Cited in **4** Reviews
11F06	Structure of modular groups and generalizations; arithmetic groups	Cited in **28** Documents

Keywords:

abelian integrals; modular group

Full Text: DOI

References:

[1] Nous avons précédemment appeléz 1 la valeur initiale prise pourz quand on at=t o , nous l'appelons maintenantz o afin de pouvoir garder plus de symétrie dans les notations qui suivent.

[2] Tome 1er de ce recueil.