Lindemann, F.

On the number π. (Ueber die Zahl π.) (German) JFM 14.0369.04

Klein Ann. XX, 213-225 (1882).

In seiner Abhandlung: Sur la fonction exponentielle (C. R. Bd. LXXVII., s. F. d. M. V. (1873.) p.248, JFM 05.0248.01) hat Herr Hermite die Unmöglichkeit einer Relation von der Form

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n} = 0$$

bewiesen, wo sowohl die z als die N als ganz vorausgesetzt werden. Herr Lindemann (siehe auch JFM 14.0369.02, JFM 14.0369.03) erweitert die hier gemachten Schlüsse und gelangt zu folgendem Satze: „Sind

$$f_1(z) = 0, f_2(z) = 0, \ldots, f_s(z) = 0$$

s algebraische Gleichungen, von denen jede irreductibel und von der Form

$$z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n = 0$$

ist, wo unter a_1, a_2,..., a_n ganze Zahlen zu verstehen sind, werden ferner mit z_i, z_i', z_i'',... die Wurzeln der Gleichung $f_i(z) = 0$ bezeichnet, wird kurz

$$\Sigma e^{z_i} = e^{z_i} + e^{z_i'} + e^{z_i''} + \ldots$$

gesetzt, bedeuten endlich N_0, N_1,..., N_s beliebige ganze Zahlen, welche nicht sämmtlich gleich Null sind, so kann eine Relation von der Form

$$0 = N_0 + N_1 \Sigma e^{z_1} + N_2 \Sigma e^{z_2} + \cdots + N_s \Sigma e^{z_s}$$

nicht bestehen, es sei denn, dass eine der Grössen z gleich Null ist.“

Ersetzt man die Gleichungen $f_i(z) = 0$ durch diejenigen irreduciblen Gleichungen, welche bez. von den Zahlen

$$Z_1 = z_1, Z_2 = z_1 + z_2, Z_3 = z_1 + z_2 + z_3, \ldots, Z_n = z_1 + z_2 \cdots + z_n$$

befriedigt werden, so führt dieser besondere Fall zu dem Satze: „Ist z eine von Null verschiedene rationale oder algebraisch irrationale Zahl, so ist e^τ immer transcendent.“ Damit ist bewiesen, dass die Ludolph'sche Zahl π eine transcendente Zahl ist. Die angeführten Sätze bleiben bestehen, wenn man unter den N_i nicht ganze oder rationale, sondern beliebige algebraisch-irrationale Zahlen versteht. Analog folgt aus dem obigen Satze der folgende: „Versteht man unter N_0, N_1,..., N_n beliebige, und unter z_0, z_1,..., z_n beliebige, von einander verschiedene (reelle oder complexe) algebraische Zahlen, so kann eine Relation von der Form

$$0 = N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n}$$

nicht bestehen, es sei denn, dass die N_i sämmtlich gleich Null werden.“

Reviewer: Müller, F., Dr. (Berlin)

MSC:

11J81 Transcendence (general theory)

Keywords:

π; transcendence of π

Full Text: DOI EuDML