Bäcklund, A. V.

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. (German) JFM 12.0290.02

Clebsch Ann. XVII, 285-329 (1880).

Sind z, x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines Punktes in einem Raume von vier Dimensionen, und ist die Tangentenebene in diesem Punkte an einer zweifachen Punktmannigfaltigkeit M_2 dieses Raumes dargestellt durch

$$\zeta - x = p_2(\xi_1 - x_1) + p_2(\xi_2 - x_2) + p_3(\xi_3 - x_3),$$

so genügen die dreifach unendlich vielen durch die Gleichungen

$$(1) \quad z = f(x_2 x_3 \lambda\mu\nu), \quad x_1 = \varphi(x_2 x_3 \lambda\mu\nu)$$

mit den variablen Parametern λ, μ, ν dargestellten M_2 einer partiellen Differentialgleichung 1^{ter} Ordnung:

$$(2) \quad F(z x_1 x_2 x_3 p_1 p_2 p_3) = 0,$$

die man aus den Gleichungen (1) und

$$p_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad p_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3} - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

durch Elimination von λ, μ, ν erhält. Eine Bedingung, damit umgekehrt die (nicht lineare) Differentialgleichung (2) eine vollständige Lösung besitze, die aus zwei Gleichungen, wie (1) besteht, kann man in der Form angeben, dass die Gleichung (2), falls z, x_1, x_2, x_3 als beliebige Constanten, dagegen p_1, p_2, p_3 als Coordinaten der Punkte eines gewöhnlichen Raumes interpretirt werden, eine Linienfläche in diesem Raume darstellen muss. Die Bemerkung überhaupt, dass eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer beliebigen Anzahl von unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ und einer unbekannten Function z unter Umständen eine vollständige Lösung besitzen kann, die durch mehrere Gleichungen zwischen z, $x_1, \dots x_n$ und n wilkürlichen Constanten definirt ist, rührt von Lie her (Gött. Nachr. 1872. No. 25, cf. F. d. M. IV. 1872. p. 164, JFM 04.0163.02), der auch einen Weg zur Ermittelung einer solchen Lösung derartiger partieller Differentialgleichungen (l. c.) angegeben hat. Diese Art von Differentialgleichungen wird in gegenwärtiger Abhandlung einer eingehenden Behandlung unterworfen unter Beschränkung auf eine ausführliche Darstellung für die Fälle von drei und vier Variabeln, namentlich aber für den Anfangs näher angegebenen Fall. Es gestatten aber, wie nur angeführt wird, die auf die Charakterisirung dieser Art von Differentialgleichungen hinauslaufenden Betrachtungen unmittelbar die Ausdehnung auf den Fall einer beliebigen Anzahl von unabhängigen Veränderlichen.

Reviewer: Toeplitz, Dr. (Breslau)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Werthe vonr, s, t, die zwei Gleichungen:r+ms=?,s+mt=v, wom, ?,v vonr, s, t frei sind, befriedigen, bilden ein einfach unendliches System, das ich einen Büschel nenne. Vgl. meine Abh. im XI. und XIII. Band d. Ann.

[2] Ich habe mich früher in diesem Punkte geirrt, da ich in meiner Abh. in diesen Annalen Bd. XV, pp. 83, 84 den Satz aufstellte, dass sich auf jeder Integralfläche der partiellen Differentialgleichung 2. O. ? Umhüllungs-M 2 von der im Texte besprochenen Art, die daher besondere charakteristischeM 2 für die Gleichung 2. O. werden würden, finden sollten. Aus dem oben Auseinander