Picard, E.

On an extension to two variables of Riemann's problem concerning hypergeometric functions. (Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques.) (French) JFM 12.0328.02

C. R. 91, 1267-1269 (1881).

Eine Function $F(xy)$ wird durch folgende Bedingungen definirt: 1) Zwischen vier Zweigen der Function besteht eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten. 2) Für alle Werthe α von x und β von y, die nicht mit einem der Werthe $0,\ 1,\ \infty$ zusammenfallen und von einander verschieden sind, ist sie holomorph. 3) In der Umgebung von $x=0,\ y=\beta$ haben drei Zweige der Function die Formen

$$P_1(xy),\quad P_2(xy),\quad x^{\lambda+b_1-1}P_3(xy)$$

$$\text{(die } P \text{ holomorph für } x=0,\ y=\alpha),$$

ebenso sind

$$Q_1(xy),\quad Q_2(xy),\quad (x-1)^{\lambda+b_2-1}Q_3(xy)$$

und

$$x'^{-\lambda+1}R_1(x',y),\quad x'^{-\lambda+1}R_2(x',y),\quad x'^{3-\lambda-(b_1+b_2+b_3)}R_3(x',y)$$

$$\left(\text{wo } x'=\frac{1}{x}\right)$$

drei Zweige der Function in der Umgebung $x=1,\ y=\beta$, resp. $x=\infty,\ y=\beta$. Analoge Bestimmungen werden für die Umgebung von $x=\alpha,\ y=0,\ 1,\ \infty$ festgesetzt und die verschiedenen Exponenten mit den nämlichen aber accentuirten Buchstaben bezeichnet. 4) Für $x=y=\alpha$, verschieden von $0,\ 1,\ \infty$ sind drei Zweige der Function von der Form

$$A_1(xy),\quad A_2(xy),\quad (x-y)^{\lambda+b_3-1}A_3(xy).$$

Betreffs der Exponenten wird vorausgesetzt, dass $\lambda+b_1,\ \lambda+b_2,\ \lambda+b_3$ und $b_1+b_2+b_3$ von ganzen Zahlen verschieden sind, ferner muss offenbar $\lambda+b_3=\lambda'+b_3'$ sein.

Denkt man sich y constant, dann ist F eine Function von x mit den singulären Punkten $0,\ 1,\ y,\ \infty$. Diese genügt einer linearen Differentialgleichung 3ter Ordnung in x, welche nach den Untersuchugen des Herrn Pochhammer (Borchardt J. 71, 316 ff., s. F. d. M. II. 1870. 265 (JFM 02.0265.01), siehe auch Fuchs, ibid. 72, 255., s. F. d. M. II. 266 (JFM 02.0266.01) durch die obigen Festsetzungen vollständig bestimmt ist. Eine ähnliche Differentialgleichung erhält man, indem man x als constant betrachtet, mit der unabhängigen Variablen y. Nimmt man noch an, dass

$$b_1'=b_1,\quad b_2'==b_2;\quad b_3'=\lambda,\quad \lambda'=b_3,$$

dann haben beide Gleichungen drei gemeinschaftliche linear unabhängige Integrale. Ihre Form ist

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

wo g und h zwei der vier Grössen $0,\ 1,\ y,\ x$ bedeuten. Die hier definirte Function $F(xy)$ fällt zusammen mit der von Herrn Appell in seinen Untersuchungen über die hypergeometrischen Reihen zweier Variablen (C. R. XC. 296, vgl. das bez. Referat in diesem Bande p. 296, JFM 12.0296.02) betrachteten Function $F_1(\alpha\beta\beta'\gamma xy)$, wenn man setzt

$$b_1=1+\beta+\beta'-\gamma,\quad b_2=\gamma-\alpha,\quad b_3=1-\beta',\quad \lambda=1-\beta.$$

Schliesslich werden die Resultate auf eine Function $F(xy)$ mit den n singulären Punten $a_1 \dots a_{n-1}\infty$ ausgedehnt.

Reviewer: Hamburger, Dr. (Berlin)

MSC:

33C70 Other hypergeometric functions and integrals in several variables