Appell, P.

On a class of polynomes. (Sur une classe de polynômes.) (French) JFM 12.0342.02

Ann. de l'Éc. N. (2) IX, 119-144 (1880).

Gegenstand der Untersuchung ist eine Reihe von Polynomen in x

$$A_0,\ A_1, \dots A_n,$$

wo A_n vom n^{ten} Grade ist, und zwei aufeinanderfolgende Glieder durch die Relation

$$\frac{dA_n}{dx} = nA_{n-1}$$

verknüpft sind. Die einfachsten Polynome der Art sind $1,\ x,\ x^2, \dots x^n$. Den allgemeinsten Ausdruck für dieselbe findet man in folgender Weise: Es sei

$$a(h) = \alpha_0 + h\alpha_1 + \frac{h^2}{1.2}\alpha_2 + \cdots + \frac{h^n}{1.2\dots n}\alpha_n + \cdots$$

die erzeugende Function, unter $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots$ ganz unbestimmte Grössen gedacht, so ist A_n der Coefficient von $\frac{h^n}{1.2\dots n}$ in der Entwickelung von $a(h)e^{hx}$ nach stetigen Potenzen von h, also

$$a(h)e^{hx} = A_0 + A_1h + A_2\frac{h^2}{1.2} + \cdots + A_n\frac{h^n}{1.2\dots n} + \cdots.$$

$a(h) = 1$ giebt die einfachsten Polynome $1,\ x, \dots x^n$. Unter $(AB)_n$ versteht man das Polynom, das man erhält, wenn man in A_nx^k durch B_k ersetzt. Die erzeugende Function der Polynome (AB) ist das Product $a(h).b(h)$, wenn $b(h)$ die erzeugende Function der Polynome B ist. Hiernach ist $AB)_n = (BA)_n$. $\left(\frac{B}{A}\right)_n$ wird durch die Gleichung $\left(A \cdot \frac{B}{A}\right)_n = B_n$ definirt, insbesondere $\left(\frac{1}{A}\right)_n$ durch die Gleichung $\left(A \cdot \frac{1}{A}\right)_n = x^n$. Die weitere Untersuchung betrifft die Herleitung einer linearen Relation zwischen mehreren aufeinanderfolgenden Gliedern in der Reihe der A, sowie einer linearen Differentialgleichung für A_n, wenn die erzeugende Function gegeben ist, ferner die Darstellung einer Function $F(x)$ in einer Reihe, die nach den Polynomen A_n fortschreitet. Schliesslich wird der Grenzwerth von A_n für $n = \infty$ entwickelt.

Die angewandte Methode lässt sich auf Polynome von mehreren Variablen ausdehnen. So werden die Polynome $U_{m,n}$ in $x,\ y$ definirt durch die Gleichung

$$f(h,\ k)e^{x(ah+bk)+y(b'h+c'k)} = \sum \frac{h^mk^n}{m!n!}U_{m,n},$$

wo $f(h,\ k)$ die erzeugende Function ist, entwickelbar nach ganzen positiven wachsenden Potenzen von h und k.

Reviewer: Hamburger, Dr. (Berlin)

MSC:

26C99 Polynomials, rational functions in real analysis

Full Text: Numdam EuDML