Gruss, Gustav

About the relation between several pencils of projective curves and their consequences. (Ueber Beziehungen zwischen mehreren projectivischen Curvenbüscheln und deren Erzeugnissen.) (German) JFM 12.0542.03

Prag. Ber. 1879. 287-292 (1879).

Aufsteigend von der Betrachtung mehrerer Curvenbüschel der niedrigsten Ordnungen gelangt der Verfasser zu dem folgenden allgemeinen Satze: "Die beiden durch zwei Curvenbüschel n^{ter} Ordnung und ein Curvenbüschel m^{ter} Ordnung erzeugten Curven $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmen ein Büschel, dessen Curven durch das Curvenbüschel m^{ter} Ordnung und diejenigen Curvenbüschel n^{ter} Ordnung erzeugt werden, deren Basispunktgruppen auf einer Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung liegen."

In dieser Allgemeinheit ausgesprochen ist der Satz jedoch nicht richtig, gilt vielmehr nur dann, wenn

$$2m - n \geqq 3$$

ist. Da sich ein Beweis nicht vorfindet, möge hier ein solcher mitgetheilt werden.

Fassen wir die beiden Curven C_{m+n} als Basiscurven eines Büschels auf, so schneiden sich sämmtliche Curven desselben ausser in den m^2 Basispunkten des Büschels m^{ter} Ordnung noch in $(m+n)^2 - m^2 = n(2+n)$ weiteren Punkten. Es sind nun, wie leicht zu sehen, die beiden Büschel n^{ter} Ordnung ebenfalls projectivisch aufeinander bezogen und zwar so, dass zwei Curven durch einen und denselben der $n(2m+n)$ Schnittpunkte einander entsprechen. Diese Punkte liegen also auf den C_{2n}, welche die beiden Büschel erzeugen. Nimmt man jetzt zwei andere C_{m+n} des Büschels, so erzeugen zwei ihnen zugeordnete Büschel n^{ter} Ordnung ebenfalls eine C_{2n}, welche durch dieselben $n(2m+n)$ Punkte geht. Ist also diese Anzahl zur Bestimmung einer C_{2n} hinreichend, so ist der Satz richtig, denn dann fallen die beiden C_{2n} (und also alle C_{2n} zusammen und die Bedingung hierfür ist demnach:

$$\begin{gathered} n(2m+n) \geqq \frac{1}{2} \cdot 2n(2n+3) \\ 2m - n \geqq 3, \end{gathered}$$

wie behauptet wurde. Die Fälle, in denen die gemeinschaftlichen $n(2m+n)$ Punkte dem Schnittpunktsystem zweier C_{2n} angehören, sind selbstverständlich noch besonders auszuchliessen.

Dass in der That die verschiedenen C_{2n} nicht zusammenzufallen brauchen, zeigt das Beispiel $m = n = 1$. Hier kann man jeden Punkt eines Kegelschnitts des erzeugten Büschels zum Basispunkt eines Büschels nehmen.

Aber auch bei höheren Curven, wo die Lage der Basispunkte nicht mehr vollkommen willkürlich ist, ist man nicht an eine Curve gebunden. Sei nämlich $m = 1$, $n = 2$, so giebt es ein Büschel von C_3, und die vier Basispunkte der erzeugenden Kegelschnittbüschel müssten einer und derselben C_4 angehören. Ist nun C_3 eine bestimmte Curve des Büschels, so lege man durch das Centrum S des Büschels erster Ordnung einen beliebigen Strahl, welchen die C_3 noch in zwei Punkten A, B schneiden möge. Wir zeigen nun, dass ein beliebiger durch A, B gehender Kegelschnitt als einem Büschel angehörig betrachtet werden kann, welcher mit S die C_3 erzeugt. Sind nämlich $C\ D\ E\ F$ die vier weiteren Schnittpunkte dieses Kegelschnitts, so ist S der diesen gegenüberliegende Punkt, woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt. Drei der vier Basispunkte des gewonnenen Büschels sind nun vollständig willkürlich, brauchen also insbesondere nicht auf der C_4 zu liegen.

Für $m = 2$, $n = 1$ hingegen erhält man $2m - n = 3$; es folgt der (also richtige) Plücker'sche Satz (Algebr. Curven p. 56): "Der durch fünf von den neun Schnittpunkten zweier C_3 gehende Kegelschnitt geht durch die zwei Punkte, welche den übrigen vier Schnittpunkten gegenüber liegen", welchen Satz auch der Verfasser in etwas veränderter Form mittheilt.

Die Arbeit schliesst mit dem Satze: "Der Ort der beweglichen Basispunktgruppen der in einem Curvensystem n^{ter} Ordnung mit k gemeinschaftlichen Basispunkten enthaltenen Curvenbüschel, die mit einem festen Curvenbüschel m^{ter} Ordnung ein Curvenbüschel $(n+m^{\text{ter}})$ Ordnung erzeugen, ist eine Curve $2n^{\text{ter}}$

Ordnung mit den k gemeinschaftlichen Basispunkten als Doppelpunkten."

Auch dieser ist nicht allgemein bewiesen und bedarf höchst wahrscheinlich ebenfalls einer Präcisirung.

Reviewer: Rodenberg, Prof. (Darmstadt)

MSC:

14N05 Projective techniques in algebraic geometry
51N35 Questions of classical algebraic geometry
14C21 Pencils, nets, webs in algebraic geometry

Keywords:

projective curves