Mayer, A.

The criteria of maxima and minima of simple integrals in isoperimetric problems. (Die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale in den isoperimetrischen Problemen.) (German) JFM 09.0280.01

Clebsch Ann. XIII, 53-68 (1878).

Nach der Euler'schen Regel wird das isoperimetrische Problem, die den m Bedingungen:

$$V_k \equiv \int_{x_0}^{x_1} f_k(x, y_1, \dots y_n, y_1, \dots y_n)dx = l_k, \quad k = 1, 2, \dots m$$

unterworfenen Functionen $y_1, \dots y_n$ von x so zu bestimmen, dass das gegebene Integral:

$$V \equiv \int_{x_0}^{x_1} f_k(x, y_1, \dots y_n, y_1', \dots y_n')dx$$

einen relativ grössten oder kleinsten Werth erhalte, in der Weise gelöst, dass man zunächst ganz so verfährt, als ob es sich darum handelte, das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} (f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m)dx,$$

in welchem die λ unbestimmte Constanten sind, zu einem absoluten Maximum oder Minimum zu machen, und hinterher diesen Constanten diejenigen Werthe beilegt, welche sich aus den Bedingungen $V_k = l_k$ ergeben.

Die beiden genannten Probleme werden hiernach jedenfalls durch dieselben Functionen y gelöst. Man darf aber durchaus nicht, wie dies doch in allen Lehrbüchern geschieht, auch in Betreff der Frage, ob und innerhalb welcher Grenzen diese Functionen ein wirkliches Maximum oder Minimum hervorrufen, das erste, relative Problem durch das zweite, absolute ersetzen. Man überzeugt sich vielmehr leicht an solchen Beispielen, in denen sich diese Frage durch geometrische oder mechanische Betrachtungen direct entscheiden lässt, dass im Allgemeinen die Kriterien des Maximums und Minimums in beiden Problemen unmöglich dieselben sein können. So würde sich z. B. aus der Annahme, dass beide Probleme vollkommen identisch wären, für die Aufgabe der Gleichgewichtsfigur eines schweren homogenen Fadens das absurde Resultat ergeben, dass nicht bei jeder Lage der Aufhängspunkte der Fadenschwerpunkt wirklich die tiefstmögliche Stelle einnimmt. Es fragt sich daher, welches sind für die isoperimetrischen Probleme die wahren Kriterien des Maximums und Minimums?

Nun sind aber die isoperimetrischen Probleme als specielle Fälle enthalten in demjenigen allgemeinen Probleme der Variationsrechnung, für welches der Verfasser in Borchardt's J. LXIX. die Kriterien des Maximums und Minimums aufgestellt hat. Aus diesen allgemeinen Kriterien müssen sich daher nothwendig auch die besonderen Kriterien der isoperimetrischen Probleme ableiten lassen.

Diesen Gedanken führt der vorliegende Aufsatz aus und gelangt hierdurch zu Resultaten, welche, auf völlig anderem und wohl entschieden nicht immer ganz strengem Wege bereits 1869 von Lundström (Nov. Act. Ups. (3) VII.) erhalten wurden.

Die auf diese Weise gewonnenen Kriterien werden dann an dem Reciprocitätsgesetze der isoperimetrischen Probleme geprüft, und schliesslich an dem oben erwähnten Fadenprobleme erläutert, für welches sie das richtige Resultat ergeben.

Reviewer: Mayer, Prof. (Leipzig)

MSC:

49K05 Optimality conditions for free problems in one independent variable

Keywords:

Lagrange multipliers; isoperimetric problems; catenary

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Leipzig 1866.

[2] Leçons sur le calcul des fonetions, Ausgabe von 1806 p. 466 und 469.

[3] Borchardt's J. 55, p 336.