Schwarz, H. A.

On those cases in which the Gaussian hypergeometric series represents an algebraic function of its four elements. (Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt.) (German)

JFM 05.0249.01
Borchardt J. LXXV, 292-335 (1872).

Gauss hat in seiner Abhandlung „Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc." (Werke III, p. 127) einige specielle Fälle angegeben, in denen die nach ihm benannte Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ für besondere Werthe von α,β,γ eine algebraische Function ihres vierten Elementes x ist. Verschiedene Mittel, die Anzahl dieser speciellen Fälle zu vermehren, bieten ausser der genannten Abhandlung dar die Arbeit von Kummer „Ueber die hypergeometrische Reihe" (Crelle J. XV, 39), ferner Riemann's „Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ darstellbaren Functionen", (Gött. Abh. VII, 1857), und die nachgelassene Arbeit von Gauss „Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis" (Werke III, 207). In vorliegender Arbeit beschäftigt sich nun Herr Schwarz mit Lösung der Aufgabe: „Alle Fälle zu ermitteln, in denen der linearen Differentialgleichung

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}\cdot y=0,$$

von der die Gauss'sche Reihe, als Function von x betrachtet, ein particuläres Integral ist, durch eine algebraische Function von x genügt wird". Im Auszuge war der Inhalt dieser Abhandlung bereits mitgetheilt in den Verhandlungen der Schweizerischen Naturfoschenden Gesellschaft, Jahrgang 1871, p. 75-77.

Zwei Fälle sind bei unsrer Aufgabe zu unterscheiden. In dem ersten Falle (Art. 1) wird vorausgesetzt, dass die Differentialgleichung (1) nur ein particuläres algebraisches Integral besitzt, und dass diese algebraische Function selbst oder ihre logarithmische Ableitung eine rationale Function von x ist. In diesem Falle gewinnt man sofort die Form $y_1=x^a(1-x)^cg(x)$ des gesuchten particulären Integrals mit Hülfe der Resultate, welche Herr Fuchs in seiner Arbeit: „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten" (Borchardt J. LVI, 121) für eine ganze Klasse linearer Differentialgleichungen gewonnen, zu denen als specieller Fall die obige Riemann'sche Differentialgleichung gehört. Die Untersuchung der vier durch Bestimmung der rationalen Zahlen a und c sich ergebenden besonderen Fälle bictet weiter keine Schwierigkeit.

Der zweite Fall (Art. II) ist der, wo die Differentialgleichung (1) zwei particuläre algebraische Integrale hat, deren Quotient nicht constant ist. Zur Erledigung dieses zweiten Falles benutzt Herr Schwarz eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher der Quotient zweier Particularlösungen y_2 und y_1 der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0,$$

also ein Ausdruck von der Form

$$s=\frac{C_1y_1+C_2y_2}{C_3y_1+C_4y_2}$$

genügt. Diese Differentialgleichung dritter Ordnung lautet:

$$(F.)\quad \psi(s,x)=\frac{2\frac{ds}{dx}\cdot\frac{d^3s}{dx^3}-3\left(\frac{d^2s}{dx^2}\right)^2}{2\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}=2q-\frac{1}{2}p^2-\frac{dp}{dx}=F(x)$$

und ist ein specieller Fall der Differentialgleichung

$$2\frac{d^3z}{dz\cdot dx^2}-3\left(\frac{d^2x}{dz\;dx}\right)^2-Z\frac{dz^2}{dx^2}+X=0,$$

zu der Herr Kummer durch Vergleichung zweier hypergeometrischen Reihen gelangt ist (De generali quadam aequat. diff. tert. ord. Pr. Liegnitz 1834), welche übrigens auch in der Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen von Wichtigkeit ist (s. Jacobi, Fundamenta, p. 78). Die Gleichung (F) wird nun (Art. III) unter der Voraussetzung, dass α, β, γ reelle Werthe haben, integrirt. Das allgemeine Integral derselben, welches der Herr Verfasser mit $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ bezeichnet, wo λ, μ, ν die positiven Werthe der Quadratwurzeln aus resp. $(1-\gamma)^2$, $(\alpha-\beta)^2$, $(\gamma-\alpha-\beta)^2$ bedeuten, ergiebt sich als Quotient zweier linear unabhängigen Riemann'schen Functionen $P(\lambda, \mu, \nu, x)$ (l. c. art. V). Ein particuläres Integral s' wird durch Entwickelung von $\frac{d}{dx} \log \frac{ds'}{dr} = r$ nach Potenzen von $(x - x_0)$ gewonnen, und dann das Verhalten desselben in der Nähe des singulären Werthes $x = 0$ untersucht. Es ergiebt sich der Satz: „Die auf der positiven Seite der reellen Axe der Ebene des Argumentes x liegende Halbebene E wird durch ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\psi(s,x) = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2x(1-x)},$$

wenn die drei Grössen λ, μ, ν reelle Werthe haben, conform abgebildet auf einem einfach zusammenhängenden, in seinem Innern keinen Windungspunkt enthaltenden Bereich S, dessen Begrenzung, allgemein zu reden, aus drei ein Dreieck bildenden Kreisbogen besteht". Nun wird die gegenseitige, von den Zahlen λ, μ, ν abhängige Lage der Kreise, denen die drei Seiten des Kreisbogendreiecks S angehören; näher untersucht (Art. IV). Das Gebiet S kann über jede seiner drei Seiten hinaus analytisch fortgesetzt werden; die so entstehenden Gebiete S_1 nennt Herr Schwarz eine „symmetrische Wiederholung" des Gebietes S. Ist s eine algebraische Function von x, so ist die Anzahl der von einander verschiedenen Gebiete S und S_1 eine endliche. Das Kreisbogendreieck S'', für welches die Summe der Winkel ein Minimum ist, wird das dem Kreisbogendreieck S zugeordnete „reducirte" Kreisbogendreieck genannt. Nun wird zunächst der Fall erörtert, wo die Winkelsumme des reducirten Kreisbogendreiecks kleiner als π (Art. V), und es werden Fälle erschöpft, in denen die conforme Abbildung der Fläche eines geradlinigen Dreiecks auf die Fläche einer Halbebene durch eine analytische Function vermittelt wird, bei welcher jedem Werthe des unbeschränkt veränderlichen Arguments nur eine endliche Anzahl von Werthen der Function entspricht. Der zweite Fall, wo die Winkelsumme des Dreiecks S'' grösser als π ist (Art. VI) führt auf die Aufgabe: „Alle sphärischen Dreiecke zu finden, deren symmetrische und congruente Wiederholungen auf der Kugeloberfläche nur zu einer endlichen Anzahl von, der Lage nach verschiedenen sphärischen Dreiecken Anlass geben". (Vgl. Riemann: „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung", Gött. Abh. XIII; Schwarz: Berl. Ber. 1865, 149; Steiner: „Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze", Crelle J. XVIII, 295, und ibid. XXIV, 247; C. Jordan: „Recherches sur les polyédres", Borchardt J. LXVI; Amstein, Diss. Zürich. Vierteljahrsschr. XVI, 1871, 297-341, s. F. d. M. III, p. 422, JFM 03.0422.01). Im Schlussartikel (VII) erörtert der Herr Verfasser den Fall, dass von den drei Zahlen λ, μ, ν eine oder zwei ganzzahlig sind.

Reviewer: Müller, Felix, Dr. (Berlin)

MSC:

33C60	Hypergeometric integrals and functions defined by them (E, G, H and I functions)	Cited in **17** Reviews Cited in **5** Documents

Keywords:

Hypergeometric series as algebraic functions

Full Text: EuDML