Brill, Alexander

On correspondence of point systems on a curve. (Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve.) (German) JFM 05.0305.01

Clebsch Ann. VI, 33-65 (1873).

Wenn zwischen zwei Punkten x und y einer geraden Linie eine Beziehung derart besteht, dass jedem Punkt x eine Anzahl (etwa λ) Punkte y und jedem Punkt $y(k)$ Punkte x entsprechen, welche mit x, bezw. y, beweglich sind, so lässt sich ein Abhängigkeitsverhältniss zwischen beiden – nach Chasles eine "Correspondenz" – durch eine Gleichung zwischen zwei den Punkten zugehörigen Variabeln ausdrücken, welche für die eine zum Grad k, für die andere zum Grad λ ansteigt. Wenn die Punktreihe eine krumme ist, und die einander entsprechenden Puncte x und y auf einer algebraischen Curve f liegen, so hat man sich die Correspondenz als eine Gleichung zwischen den Coordinaten der Punkte x und y zu denken, vermöge deren jedem Punkt y eine Curve (x) entspricht, welche f in den dem Punkt y entsprechenden (mit y beweglichen) Punkten x und ausserdem beliebig noch in festen Punkten schneidet; von den beweglichen können einige in den Punkt y selbst fallen. In gleicher Weise entspricht dem Punkt x eine Curve (y) mit ähnlichen Eigenschaften, wie die Curve (x); und es ist bemerkenswerth, dass die Anzahl der in y bezw. x entfallenden Schnittpunkte von (x) bezw. (y) gleichgross ist. Eine Zurückführung dieses Falles auf den einer geraden Punktreihe, etwa durch Elimination je einer der Coordinaten der Punkte x und y, erweist sich darum als unzweckmässig, weil die entstehende Gleichung zwischen je nur einer der Coordinaten von x und y den Inhalt der Correspondenz nicht mehr vollständig darstellen würde (vgl. übrigens die Verbesserung zu \$1 in dem Druckfehlerverzeichniss des VI. Bandes). Es müssen darum für den Fall krummliniger Punktreihen die Chasles'schen Sätze über Correspondenzen eine Modification erfahren. Diese anzugeben ist die Aufgabe, die sich der Verfasser stellt. Nun ist eine der nächstliegenden Fragen über Correspondenzen die nach der Anzahl der Punktepaare, welche zweien zugleich genügen. Der Verfasser löst diese Aufgabe für Punkte einer algebraischen Curve von beliebigem Grad und Geschlecht, indem er, von den einfachsten Annahmen über die beiden Correspondenzen ausgehend, stufenweise zu dem Fall übergeht, dass die beiden Correspondenzgleichungen durch Zusammenfallen der Punkte x und y identisch erfüllt werden, und dass für beide die Curven (x) und (y) durch die Doppel- und Rückkehrpunkte von f und durch eine beliebige Anzahl einfacher fester Punkte von f hindurchgehen. Die Schwierigkeit, welche das identische Verschwinden beim Zusammenrücken von x und y mit sich bringt, wird durch Variation der Constanten in der Correspondenzgleichung beseitigt. Die gesuchte Zahl ergiebt sich auf dem angedeuteten Wege zunächst als ein Ausdruck, welcher von der Anzahl der "Coincidenzpunkte" der einen Correspondenz abhängt, d. h. von der Anzahl der Punkte von f, in welchen zwei einander entsprechende Punkte x und y zusammen gefallen sind. Jener Ausdruck verhält sich indess den beiden Correspondenzen gegenüber unsymmetrisch; indem man diesen Umstand benutzt, die Correspondenzen vertauscht und die erhaltenen Ausdrücke gleich setzt, erhält man eine Formel für die Anzahl der Coincidenzen einer gegebenen Correspondenz und somit eine Ausdehnung des bekannten Correspondenzprincips von Chasles auf Curven von beliebiger Ordnung und beliebigem Geschlecht.

Der zweite Theil des Aufsatzes beschäftigt sich mit der Aufstellung der Anzahl derjenigen Punktetripel bezw. -quadrupel auf die Curve f, welch zugleich drei bezw. vier Relationen zwischen ihren Coordinaten befriedigen, immer unter Berücksichtigung des Falls, dass jene Relationen alle oder zum Theil durch Zusammenfallen je zweier der variabeln Punkte befriedigt werden. Man begegnet der Schwierigkeit, der sich der Bestimmung des Grades der Resultante in diesem Fall entgegensetzen, wie früher durch Variation der Constanzen, wobei es sich als zweckmässig herausstellt, die Variationen für die Constanten der verschiedenen Gleichungen in verschiedener Ordnung der Null sich annähernd anzunehmen.

In dem Anhang zum 1^{ten} Theil findet man aus den erwähnten Betrachtungen eine Recursionsformel aufgestellt, vermöge deren der bekannte von Jonquières und Cayley angegebene Ausdruck für die Anzahl der Curven, welche gewisse Berührungsbedingungen erfüllen, – ein Ausdruck, der durch Induction erhalten wurde – bewiesen werden kann. Eine andere Anwendung wird auf die Bestimmung der Anzahl der vierfach schneidenden Sehnen einer Raumcurve gemacht. In dem Anhang zum 2^{ten} Theil ermittelt ferner der Verfasser die Anzahl derjenigen aus einer 6-fach unendlichen Schaar auszuscheidenden 3-fach unendlichen Curvenschaaren (von beliebiger Ordnung), die der Bedingung genügen, auf einer gegebenen festen Curve noch vier weitere Basispunkte zu besitzen. Auf diese Bestimmung gestützt, kann man u. A. die Anzahl derjenigen rationalen Functionen von zwei Variabeln angeben, welche für nur 5 Punkte einer Curve vom Geschlecht 8 Null und unendlich werden.

Reviewer: Brill, Prof. (Darmstadt)

MSC:

14H35 Correspondences [See also 14Exx] (MSC2000)

Keywords:

correspondence

Full Text: DOI EuDML