Neumann, C.

Revision einiger allgemeiner Sätze aus der Theorie des Newton'schen Potentials. (German)

JFM 03.0491.02
Clebsch Ann. III, 424-434 (1871).

Es erscheint angemessen über die vorstehenden Abhandlungen, von denen die eine auf die Ebene (JFM 03.0491.01), die andere auf den Raum sich bezieht, gleichzeitig zu referiren.

Die Untersuchung bezieht sich auf Functionen Φ der rechtwinkligen Coordinaten x, y (resp. x, y, z), welche gegeben sind für irgend eine Fläche $\mathfrak{T}$ (resp. Raum $\mathfrak{T}$), und mit Bezug auf dieses Gebiet characterisirt sind durch folgende Anforderungen:

$$(I.)\quad \begin{cases} \text{Es wird verlangt, die Function } \Phi \text{ solle in Erstreckung} \\ \text{des Gebietes } \mathfrak{T} \text{ eindeutig und gleichmässig stetig sein.} \\ \text{Ueberdies wird, falls } \mathfrak{T} \text{ unendlich ist, gleichzeitig noch} \\ \text{verlangt, der Werth von } \Phi \text{ solle für sämmtliche Punkte} \\ x, y \text{ (oder } x,\ y,\ z\text{), die in's Unendliche sich entfernen,} \\ \text{convergiren gegen eine endliche (jedoch nicht vorgeschriebene)} \\ \text{Constante } \Gamma. \end{cases}$$

$$(II.)\quad \begin{cases} \text{Sodann wird verlangt, dass die Ableitungen von } \Phi \\ \text{eindeutig und gleichmässig stetig sind in Erstreckung} \\ \text{eines jeden Gebietes, das vollständig innerhalb } \mathfrak{T} \text{ liegt,} \\ \text{und dass ferner } \Delta\Phi \text{ in Erstreckung eines jeden solchen} \\ \text{Gebietes} = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Dabei soll übrigens unter $\mathfrak{T}$ ein von beliebig vielen Curven (resp. Flächen) begrenztes Gebiet verstanden werden, einerlei, ob dasselbe endlich oder unendlich ist; nur soll vorausgesetzt sein, dass sämmtliche Grenzpunkte des Gebietes im Endlichen liegen. Selbstverständlich bezeichnet ausserdem $\Delta\Phi$ den Ausdruck:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\ \left(\text{resp. den Ausdruck } \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right).$$

Für die durch die Bedingungen $(II.)$ charakterisirten Functionen Φ wird nun vom Verfasser ein (wie es scheint) absolut strenger Beweis geführt für gewisse Sätze, von denen hier nur einzelne näher mitgetheilt werden sollen. Einer derselben lautet:

"Ist das Gebiet $\mathfrak{T}$ endlich, so kann immer nur eine einzige Function Φ existiren, welche mit Bezug auf $\mathfrak{T}$ die Bedingungen $(II.)$ erfüllt, und an der Grenze von $\mathfrak{T}$ vorgeschriebene Werthe besitzt." Oder kürzer ausgedrückt: "Eine Function Φ, welche für ein gegebenes Gebiet $\mathfrak{T}$ die Bedingungen $(II.)$ erfüllen soll, wird, falls $\mathfrak{T}$ endlich ist, vollständig bestimmt sein durch Angabe ihrer Werthe an der Grenze von $\mathfrak{T}$."

Für ein unendliches Gebiet $\mathfrak{T}$ gilt der analoge Satz für die Betrachtung in der Ebene in unbedingter Weise, für die Betrachtung im Raume hingegen nur dann, wenn man zu den Bedingungen $(II.)$ noch hinzufügt die fernere Bedingung:

$$\iint \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}d\sigma = C,$$

wo die Integration sich hinerstreckt über alle Elemente $d\sigma$ einer unendlich fernen Kugelfläche, ν die Normale dieser Fläche repräsentirt, und C eine beliebig gegebene Zahl bezeichnet. Diese noch hinzuzufügende Bedingung kann übrigens auch durch andere ersetzt werden, z. B. durch $\Gamma = C$, wo Γ die bei $(II.)$ angegebene Convergenzconstante bedeutet.

Reviewer: Neumann, C., Prof. (Leipzig)

Full Text: DOI EuDML