Kolmogoroff, A.
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (German) Zbl 0007.21601
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 2, No. 3. Berlin: Julius Springer. iv, 62 pp. (1933).

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird in größter Allgemeinheit lückenlos axiomatisch aufgebaut und erstmalig ganz systematisch und sehr naturgemäß in die abstrakte Maßtheorie eingeordnet. Das Axiomensystem ist wohl das denkbar einfachste. Zugrunde gelegt wird eine Menge E der "elementaren Ereignisse", während die "zufälligen Ereignisse" natürlich Teilmengen von E sind. Axiomatisiert wird der Begriff des zufälligen Ereignisses und seiner Wahrscheinlichkeit: E is vorgegeben; ein System $\mathfrak{F}$ von Teilmengen von E (die Elemente von $\mathfrak{F}$ sind die zufälligen Ereignisse) heißt Wahrscheinlichkeitsfeld, wenn folgende Axiome erfüllt sind: I. $\mathfrak{F}$ ist ein Mengenkörper. II. $\mathfrak{F}$ enthält E. III. Jeder Menge A aus $\mathfrak{F}$ ist eine nichtnegative reelle Zahl $P(A)$ – die Wahrscheinlichkeit – zugeordnet. IV. $P(E) = 1$. V. Wenn A und B fremd sind ("unvereinbare Ereignisse"), so gilt $P(A) + P(B) = P(A + B)$. VI. Für eine monoton abnehmende Folge $\{A_n\}$ von Mengen aus $\mathfrak{F}$ mit leerem Durchschnitt gilt $\lim(A_n) = 0$. Die Wahrscheinlichkeit ist also eine additive Mengenfunktion auf einem Mengenkörper. Wie die zahlenmäßige Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten geschieht, ist nicht Angelegenheit der Axiomatik. Das Axiom VI folgt für endliche Wahrscheinlichkeitsfelder aus den übrigen; da in der Praxis immer nur endliche Felder vorliegen, kann es zu keiner Kollision mit der Beobachtung "zufälliger Prozesse" führen. Darüber hinaus ist dieses Axiom allerdings nicht zwingend, wenn auch mehr als plausibel. Seine große Bedeutung liegt darin, daß es gestattet, den Bereich $\mathfrak{F}$ mit der Wahrscheinlichkeiten bewerteten Mengen wesentlich zu erweitern. Auf dem kleinsten Borelschen Mengenkörper über $\mathfrak{F}$ gibt es nämlich genau eine den Axiomen I–VI genügende Mengenfunktion, die für die Mengen von $\mathfrak{F}$ mit der gegebenen Funktion $P(A)$ übereinstimmt, und man kann somit gleich diesen Borelschen Körper der Betrachtung zugrunde legen. Mathematisch kommt also das Axiomensystem auf die Theorie der absolut additiven Mengenfunktionen, d.h. auf die abstrakte Maßtheorie hinaus, und die Eigenart der Wahrscheinlichkeitsrechnung innerhalb dieser Theorie ergibt sich dann durch weitere Spezialisierungen (etwa durch Einführung der Unabhängigkeit). Die Abrundung und Einfachheit der Theorie ist somit wesentlich dem Axiom VI zu verdanken. (Verf. legt der Betrachtung die Borelsche Maßtheorie zugrunde; es sei dazu bemerkt, daß man ebenso auch die Lebesguesche Theorie benutzen kann, wenn man noch definiert, daß jede Teilmenge einer Menge mit der Wahrscheinlichkeit Null ebenfalls die Wahrscheinlichkeit Null bestizt.)

Das erste Kapitel bringt die Theorie der endlichen Felder: bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Satz von Bayes. Das zweite Kapitel ist dem Axiom VI gewidmet. Das dritte bringt in größter Allgemeinheit die "zufälligen Größen" – es sind das die in bezug auf $P(A)$ meßbaren Funktionen. Bemerkenswert ist hier die große Allgemeinheit: es werden Wahrscheinlichkeiten auch in unendlich dimensionalen Räumen beliebiger Mächtigkeit behandelt. Das vierte Kapitel behandelt die mathematischen Erwartungen als abstrakte Lebesguesche Integrale und die Tschebycheffsche Ungleichung, das fünfte die bedingten Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen. Im letzten Kapitel wird der Begriff der Unabhängigkeit entwickelt, und als Anwendung das Gesetz der großen Zahlen. Als Anhang ein Satz über Fälle, in denen die Wahrscheinlichkeiten nur Null oder Eins sein können, wobei das Beispiel der Konvergenz einer Reihe unabhängiger zufälliger Größen ein Spezialfall ist.

Die Darstellung ist sehr präzise, aber etwas kanpp, und wendet sich an Leser, denen die Materie nicht fremd ist. Die Maßtheorie wird vorausgesetzt.

Reviewer: Willy Feller (Kiel)

For a scan of this review see the web version.

MSC:

60-02	Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to probability theory	Cited in **29** Reviews Cited in **106** Documents

Keywords:

probability theory, statistics, etc.