Carlitz, Leonard

On certain functions connected with polynomials in a Galois field. (English) Zbl 0012.04904

Duke Math. J. 1, 137-168 (1935).

Die Polynome $E = E(x)$ über einem Galoisfeld GF(q) haben analoge Eigenschaften wie die ganzen Zahlen. Man kann für sie einen Betrag $|E| = q^k$ definieren, wo k der Grad von E ist, und man kann analog zum Körper $\mathfrak{R}$ der reellen Zahlen den Körper $\mathfrak{F}$ der (stets konvergenten) Potenzreihen

$$c_k + \ldots + c_0 + c_{-1}x^{-1} + \ldots$$

bilden. Ist t eine weitere Unbestimmte, so kann man Polynome und formale Potenzreihen in t über $\mathfrak{F}$ bilden und den Konvergenzbereich einer solchen Potenzreihe in $\mathfrak{F}$ definieren. Eine besondere Rolle spielen die „linearen” Funktionen

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^{q^i}, \quad f(t+u) = f(t) + f(u), \quad f(ct) = cf(t).$$

Für sie kann man eine Zusammensetzung $f(g(t))$ and eine inverse Funktion mit den Eigenschaften $g(f(t)) = f(g(t) = t$ definieren.

In dieser Arbeit werden nun spezielle „lineare” Polynome $\psi_k(t)$ and eine „lineare” Potenzreihe $\psi(t)$ studiert. Man setze

$$[k] = x^{q^k} - x, \quad F_k = [k][k-1]^q \ldots [k][l]^{q^k-1}, \quad L_k = [k][k-1]\ldots[1], \quad \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} = F_k F_j^{-1} L_{k-j}^{-q^j}.$$

Dann ist

$$\psi_k(t) = \prod_{\text{Grad } E<k} (t-E) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} t^{q^j},$$

$$\psi_k(t) - x\psi_k(t) = [k]\psi_{k-1}^q(t).$$

Jede lineare Funktion $f(t)$ kann nach den ψ_k entwickelt werden:

$$f(ut) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j(u)\psi_j(t).$$

Die Koeffizienten $\beta_j(u)$ werden aus $f(u)$ durch eine bestimmte Operation Δ^j gewonnen. Man setze welter

$$\xi = \lim_{k\to\infty} [1]^{q^k(q-1)^{-1}} [k]^{-1}[k-1]^{-1}\ldots[1]^{-1},$$

$$\psi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j F_j^{-1} t^{q^j}.$$

Dann ist $\psi(\xi t)$ ein unendliches Produkt:

$$\psi(\xi t) = \xi t \prod_{E} \left(1 - \frac{t}{E}\right), \quad \psi(t+\xi E) = \psi(t).$$

Für jedes Polynom M vom Grade m gilt

$$\psi(Mu)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j F_j^{-1}\psi_j^{q^j}(M)=\omega_M(\psi(n)),$$

$$\omega_M(t)=(-1)^j\prod_{E \bmod M}\{t-\psi(EM^{-1}\xi)\}.$$

Die inverse Funktion von $\psi(t)$ ist

$$\lambda(t)=\sum_{j=0}^{\infty}L_j^{-1}t^{q^j},\quad \text{konvergent für } |t|\le|x|.$$

Mit Hilfe der Relation $\lambda(xt)-x\lambda(t)=\lambda(t^q)$ kann die Funktion $\lambda(t)$ für alle t definiert werden. Relationen zwischen den Koeffizienten der inversen Funktion und der Funktion $f(t)^{-1}$ werden hergeleitet and auf die Funktionen $\psi(t)^{-1}$ und $\psi_k(t)^{-1}$ angewandt. Die Summen der $(-m)$-ten Potenzen aller normierten Polynome vom Grade k, sowie auch aller normierten Polynome, werden ausgewertet. Ein neuer Beweis des F. K. Schmidtschen Reziprozitätssatzes für die $(q-1)$-ten Potenzreste. Eine notwendige and hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Kongruenz $t^q-t\equiv A \pmod P$.

Vgl. auch das Referat im JFM 61.0127.01.

Reviewer: B. L. van der Waerden (Leipzig)

For a scan of this review see the web version.

MSC:

11T06	Polynomials over finite fields	Cited in **23** Reviews
11T30	Structure theory for finite fields and commutative rings (number-theoretic aspects)	Cited in **106** Documents

Keywords:

polynomials in Galois field; linear functions; relations between coefficients of inverse and reciprocal functions; Schmidt's reciprocity law; solvability of congruence

Full Text: DOI