Witt, Ernst

Faithful representation of Lie rings. (Treue Darstellung Liescher Ringe.) (German)

Zbl 0016.24401
J. Reine Angew. Math. 177, 152-160 (1937).

Unter einer Darstellung $a \to A$, $b \to B$ eines Lieschen Ringes $\mathfrak{L}$ mit den Operationen $a+b$ und $a \bigcirc b$ versteht man eine eineindeutige Abbildung auf Elemente A, B eines assoziativen Ringes $\mathfrak{A}$, wobei $a+b$ in $A+B$ und $a \bigcirc b$ in den Kommutator $A \bigcirc B = AB - BA$ übergeht.

Zu einem Lieschen Ring $\mathfrak{L}$ mit einem Körper K als Operatorenbereich und der Basis $u_1, u_2, \dots$ über K wird ein Modul $\mathfrak{A}$ mit der K-Basis $(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n})$, $n \geq 1$ endlich, $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ (auch transfinit) definiert. Mit der Regel

$$(\dots, u_j, u_k, \dots) - (\dots, u_k, u_j, \dots) = (\dots, u_j \bigcirc u_k, \dots)$$

werden auch Klammern mit permutierten u_i eingeführt; die Klammern sollen linear in jeder Komponente sein. Zwei Elemente $(a_1, \dots, a_m)$ und $(b_1, \dots, b_n)$ aus $\mathfrak{A}$ (a_i und b_i aus $\mathfrak{L}$) bekommen das (assoziative) Produkt $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$. So enthält der Ring $\mathfrak{A}$ die eineindeutige Darstellung τ von $\mathfrak{L}$ und wird von $\tau(\mathfrak{L})$ erzeugt. Andere Darstellungen gehen durch Homomorphismen aus dieser hervor. Durch diese Eigenschaften ist sie eindeutig gekennzeichnet.

Ist $\mathfrak{L}$ der freie Liesche Ring $\mathfrak{L}_q$ von q Erzeugenden s_i, so wird $\mathfrak{A}$ der freie assoziative Ring $\mathfrak{A}_q$ aus q Erzeugenden S_i. $\mathfrak{L}_q$ enthält den Modul Ψ_n der homogenen Ausdrücke vom Grad n in den s_i mit der Dimension

$$\psi_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot q^{\frac{n}{d}}.$$

$\mathfrak{L}_q$ hat kein Zentrum.

Im gruppentheoretischen Teil der Arbeit werden die q Erzeugenden σ_i der freien Gruppe $\mathfrak{G}_q$ mit Hilfe der Homomorphie Φ auf $\Phi(\sigma_i) = 1 + S_i$ aus $\mathfrak{A}_q$ abgebildet. Für g aus $\mathfrak{G}_q$ wird $\Phi(g) = 1 + \varphi_1(g) + \varphi_2(g) + \dots$, worin die $\varphi_n(g)$ aus $\mathfrak{A}_q$ homogen vom Grad n in den S_i sind. Durch rekursive Kommutatorbildung $\mathfrak{G}_q^{(1)} = \mathfrak{G}_q$, $\mathfrak{G}_q^{(n)}$ erzeugt von

$$g_1 g_{n-1} g_1^{-1} g_{n-1}^{-1} \quad (g_1 \subset \mathfrak{G}_q,\ g_{n-1} \subset \mathfrak{G}_q^{(n-1)})$$

kommt man zu den Elementen $g_n \subset \mathfrak{G}_q^{(n)}$ mit $\Phi(g_n) = 1 + \varphi(g_n) + \dots$. $\mathfrak{G}_q^{(n)}/\mathfrak{G}_q^{(n+1)}$ ist isomorph auf $\{\varphi(g_n)\}$, die ganze additive Gruppe $\tau(\Psi_n)$ aus $\tau(\mathfrak{L}_q \subset \mathfrak{A}_q$, abgebildet, ist also frei-abelsch mit ψ_n Erzeugenden. Φ ist überdies eine Isomorphie, die $\mathfrak{G}_q^{(n)}$ haben nur den Durchschnitt 1, und $\mathfrak{G}_q/\mathfrak{G}_q^{(n+1)}$ hat das Zentrum $\mathfrak{G}_q^{(n)}/\mathfrak{G}_q^{(n+1)}$.

Reviewer: Landherr (Rostock)

For a scan of this review see the web version.

MSC:

17B01 Identities, free Lie (super)algebras
20D99 Abstract finite groups

Keywords:

faithful representation; Lie rings

Full Text: DOI Crelle EuDML