Hörmander, Lars
Linear partial differential operators. (English) Zbl 0108.09301
Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 116. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. vii, 285 p. with 1 fig. (1963).

Das Erscheinen dieser Publikation ist das größte Ereignis auf dem Gebiete der Literatur der partiellen Differentialgleichungen seit einem Vierteljahrhundert, d. h. seit 1937, als der II. Band von Courant-Hilbert erschien [*R. Courant* and *D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik. Bd. 2. Berlin: Springer (1937; Zbl 0017.39702; JFM 63.0449.05)].

Das Buch besteht aus drei Teilen = 10 Kapiteln. Der 1. Teil ("Funktionalanalysis") enthält im 1. Kapitel eine elementare, aber elegante Einführung in die Distributionentheorie von L. Schwartz, die gipfelt in den Sätzen vom Paley-Wiener Typus über die Fourier-Laplacesche Transformation der Distributionen, deren singulärer Träger: sing sup $u \subset R(0,r)$. Dabei ist sing sup u eine solche kleinste abgeschloßene Menge K, daß $u \in C^\infty(CK)$. Es werden auch Distributionen auf Mannigfaltigkeiten eingeführt. Im 2. Kapitel werden viele – für die späteren Anwendungen wichtige – Distributionenräume eingeführt und untersucht.

Die eigentliche Theorie der Differentialoperatoren umfaßt Kapitel III–X. Auf diesen knapp 200 Seiten sind ungeheuer viel Fakten und Methoden zusammengepreßt, wobei hervorzuheben ist, daß der Verf. alles streng beweist (es wird nie wegen "schwieriger Beweise" auf die Literatur verwiesen). Schon die Einteilung der Theorie ist für den Nichtspezialisten revolutionär: In allen klassischen Textbüchern wird meistens nur die Theorie der Gleichungen zweiter Ordnung behandelt, wobei man zuerst die (algebraische) Einteilung in Typen (elliptisch, hyperbolisch usw.) vornimmt und dann jeden Typus in einem besonderen Teil behandelt. Verf. dagegen behandelt gleich Operatoren beliebiger Ordnung. Seine Einteilung: konstante Koeffizienten Kapitel III–V; variable Koeffizienten: Kap. VI–X. Selbstverständlich kann man aus dieser Fülle hier nur probeweise einiges hervorheben.

Kapitel III: Eine Distribution $E \in \mathcal{D}'(R_n)$ heißt Fundamentallösung des Operators $P(D)$, falls $P(D)\mathcal{E} = \delta_0$ (Diracsches Maß). Es wird die Existenz einer Fundamentallösung (für jeden Operator mit konstanten Koeffizienten) bewiesen. Weiter wird eine Konstruktion der Fundamentallösung mit benötigten lokalen Eigenschaften gegeben. Diese Konstruktion erlaubt dem Verf., die lokale Regularität der Lösungen der Gleichung $P(D)u = f$ zu untersuchen. Ein Satz vom Runge-Typus wird bewiesen und die Lösbarkeit der Gleichung $P(D)u = f$ für $f \in \mathcal{D}'_F(\Omega)$ – Distribution endlicher Ordnung – entwickelt.

Kapitel IV: Regularität der Lösungen im Innern des Gebietes. Es werden die bekannten (Hörmanderschen) Bedingungen für die Hypoelliptizität (H. e.) von $P(D)$ aufgestellt: es sind Bedingungen dafür, daß die Gleichung $P(D)u = f$ für $f \in C^\infty$ nur C^∞-Lösungen besitzt. Formuliert in der Sprache der Träger: P^* ist h. e., falls sing sup u = sing sup $P^*(D)u$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Kapitel V: Cauchy-Problem (konstante Koeffizienten). Es werden u. a. in moderner Form klassische Sätze von Cauchy–Kovalevskaja sowie von Holmgren hergeleitet. Weiter wird ein globaler Satz von F. John bewiesen und eine Charakterisierung der Gleichungen gegeben, für welche das nichtanalytische Cauchy-Problem für beliebige rechte Seite und Cauchyanfangsdaten der Klasse C^∞ lösbar ist.

Kapitel VI: Gleichungen ohne Lösungen. *H. Lewy* [Ann. Math. (2) 66, 155–158 (1957; Zbl 0078.08104), erratum. ibid. 68, 202 (1958)] hat entdeckt, daß die Gleichung

$$\partial u/\partial x_1 + \partial u/\partial x_2 + 2i(x_1 + ix_2)\partial u/\partial x_3 = f$$

in jedem offenem $\Omega \subset \mathbb{R}_3$ bei "passender" Wahl von $f \in C^\infty(\mathbb{R}_3)$ keine Lösung besitzt. Verf. verallgemeinert dieses Ergebnis folgendermaßen:

Satz. Es sei P von einer Ordnung $\leq m$, woraus folgt, daß der Kommutator $C := P^*P - PP^*$ von einer Ordnung $\leq 2m-1$ ist. Angenommen, für ein $x \in \Omega$ und einen kovarianten Vektor ξ gilt $(*)$ $P_m(x,\xi) = 0$, $C_{2m-1}(x,\xi) \neq 0$, dann gibt es ein $f \in C^\infty(\Omega)$, so daß die Gleichung $Pu = f$ in keiner Umgebung von x eine Lösung – sogar im Sinne der Distributionentheorie – besitzt. Wenn für jedes x in einer dichten Untermenge von Ω (*) für ein ξ erfüllt ist, dann gibt es ein $f \in C^\infty(\Omega)$, so daß die Gleichung $Pu = f$ in keiner offenen Untermenge von Ω eine Distributionenlösung besitzt.

Kapitel VII: Differentialoperatoren von konstanter Stärke (k. S.). Es sei

$$\tilde{P}(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\geq 0} |P^\alpha(x,\xi)|^2,$$

wobei $P^\alpha(\eta) := i^{|\alpha|}D^\alpha P(\eta)$. Ein Operator $P(x,D)$ ist von k. S. in Ω, falls für $x,y\in\Omega$ gilt $\tilde{P}(x,\xi)/\tilde{P}(y,\xi)\leq c(x,y)$ mit $\xi\in\mathbb{R}^n$. Verf. beweist die Existenz eines Greenschen Operators (eine Verallgemeinerung der klassischen Greenschen Funktion) für ein abstraktes Randwertproblem für einen Operator P von k. S., nämlich: Wenn $P(x,D)$ C^∞-Koeffizienten besitzt und von k. S. in einer Umgebung von x_0 ist, und falls Ω eine hinreichend kleine Umgebung von x_0 ist, dann gibt es eine lineare Abbildung $E:\mathcal{E}'(R_n)\to\mathcal{E}'(R_n)$ mit folgenden Eigenschaften: $P(x,D)Ef=f$ in Ω für $f\in\mathcal{E}(R_n)$; $EP(x,D)u=u$ in Ω für $u\in\mathcal{E}'(\Omega)$.

Kapitel VIII (Differentialoperatoren mit einfachen Charakteristiken) enthält die vielleicht schönsten Ergebnisse des Verf.; wir heben folgende hervor: Zuerst werden Abschätzungen vom Carlemanschen Typus diskutiert, d. h. für eine fixierte Funktion φ:

$$\tau\sum_{|\alpha|\leq m-1}\int|D^\alpha u|^2\exp(2\tau\varphi)dx\leq K_1\int|P(x,D)u|^2\exp(2\tau\varphi)\,dx+K_2\sum_{|\alpha|\leq m-2}\tau^{2(m-|\alpha|)-1}\int|D^\alpha u|^2\exp(2\tau\varphi)\,dx, \tag{*}$$

$u\in C_0^\infty(\Omega)$, $\tau>\tau_0$. Es sei $N=\operatorname{grad}\varphi(x)$ mit $x\in\Omega$; $\zeta=\xi+i\sigma N$ mit $\xi\in\mathbb{R}_n$ und $0\neq\sigma\in\mathbb{R}_1$ genüge der charakteristischen Gleichung $P_m(x,\zeta)=0$. Mit (*) gilt dann auch die Ungleichung

$$|\zeta|^{2(m-1)}-K_2\sigma^2(|\zeta|^2+\sigma^2)^{m-2}\leq 2K_1\varphi''_P(x,\xi,\sigma),$$

wenn die linke Seite positiv ist. Dabei wurde die folgende Abkürzung benutzt

$$\varphi''_P(x,\xi,\sigma)=\sum_{i,k=1}^n\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}P_m^{(j)}(x,\zeta)\overline{P_m^{(k)}(x,\zeta)}+\sigma^{-1}\operatorname{Im}\left(\sum_1^n P_{m,k}(x,\zeta)\overline{P_m^{(k)}(x,\zeta)}\right), \tag{**}$$

wo $P_m^{(j)}(x,\xi)=\partial P_m(x,\xi)/\partial\xi_j$, $P_{m,j}(x,\xi)=\partial P_m(x,\xi)/\partial x_j$.

Definition. P heißt prinzipiell normal (principally normal), wenn es einen Differentialoperator Q der Ordnung $m-1$ gibt, so daß $C_{2m-1}(x,\xi)=2\operatorname{Re}P_m(x,\xi)\overline{Q_{m-1}(x,\xi)}$, $x\in\mathbb{R}_n$. Es gilt eine (Teil-)Umkehrung des vorstehenden Satzes: Es sei P prinzipiell normal und es sei $\varphi''_P(x,\xi,\sigma)>0$, wenn $x\in\Omega$, $0\neq\xi\in\mathbb{R}_n$ und $P_n(x,\xi)=0$. Ist K eine kompakte Untermenge von Ω, dann gilt für eine Konstante C

$$\sum_1^{m-1}\tau^{2(m-j)-1}\int|D^ju|^2\exp(2\tau\varphi)\,dx\leq C\int(|Pu|^2+\tau^{2m-1}|u|^2\exp(2\tau\varphi)\,dx,\ u\in C_0^\infty(K).$$

Wenn außerdem $\varphi''_P(x,\xi,\sigma)>0$ für alle $x\in\Omega$, $\xi\in\mathbb{R}_n$, $\sigma\in\mathbb{R}$ mit $\sigma\neq 0$ der Gleichung $P_m(x,\xi+i\sigma N)=0$ genügt, dann gilt

$$\sum_1^{m-1}\tau^{2(m-j)-1}\int|D^ju|^2\exp(2\tau\varphi)\,dx\leq C\int|Pu|^2\exp(2\tau\varphi)\,dx,\ u\in C_0^\infty(K). \tag{***}$$

Bemerkung. $|D^ju|^2:=\sum_{|\alpha|\leq j}|D^\alpha u|^2$; bei $P_m(x,\xi+i\sigma N)=0$ ändert man (**), indem man das zweite Glied ersetzt durch

$$\sigma^{-1}\operatorname{Im}\sum_1^n P_{m,k}(x,\zeta)\overline{P_m^{(k)}(x,\zeta)}-\operatorname{Re}P_m(x,\zeta)\overline{Q_{m-1}(x,\zeta)}.$$

Aus der Ungleichung (***) bekommt man den folgenden Satz (Eindeutigkeit des Cauchyproblems):

Es sei φ eine reelle Funktion in $C^2(\Omega)$ und P ein Differentialoperator, der entweder elliptisch oder prinzipiell normal ist. Weiter sei $x_0\in\Omega$ und $\operatorname{grad}\varphi(x_0)=N^0\neq 0$ sowie $\varphi''_P(x_0,\xi,\sigma)>0$ für $0\neq\zeta=\xi+i\sigma N^0$, $\xi\in\mathbb{R}_n$, $\sigma\in\mathbb{R}_1$, und ζ sei eine Lösung der Gleichung $P_m(x_0,\zeta)=0$, $\sum_1^n P_m^{(j)}(x_0,\zeta)N_j^0=0$. Dann gibt es eine solche Umgebung Ω' von x_0, daß jedes $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$, das der Gleichung $Pu=0$ in Ω genügt und auf $\Omega^+=\{x:x\in\Omega,\varphi(x)>\varphi(x_0)\}$ verschwindet, in Ω_1 identisch verschwindet.

Eindeutige Fortsetzung der Singularitäten garantiert der folgende Satz: Es sei φ eine reelle Funktion in $C^2(\Omega)$ und P prinzipiell normal. Weiter sei x_0 ein Punkt in Ω mit $\mathrm{grad}\varphi(x_0) = N^0 \neq 0$, und es sei $\varphi''_P(x_0, \xi, \sigma) > 0$ für $0 \neq \xi \in \mathbb{R}_n$ und $P_m(x_0, \zeta) = 0$, $\sum_1^n P_m^{(j)}(x_0, \zeta)N_j^0 = 0$. Dann gibt es eine solche Umgebung Ω' von x_0, daß jedes $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, für welches $Pu \in C^\infty(\Omega)$ und $u \in C^\infty(\Omega^+)$ gilt, in $C^\infty(\Omega)$ enthalten ist.

Im Kapitel IX (Cauchy-Problem für variable Koeffizienten) gelingt es dem Verf. zum großen Teil, Ergebnisse des V. Kapitels auf Operatoren mit variablen Koeffizienten zu übertragen.

Kapitel X (Elliptische Randwertaufgaben). In letzter Zeit ist es gelungen, eine richtige Definition des elliptischen Randwertproblems beliebiger Ordnung zu geben. In diesem Kapitel gibt der Verf. eine moderne Fassung dieses Problems: Das Randwertproblem wird betrachtet als eine lineare (stetige) Abbildung eines geeigneten Funktionenraumes in, ein Produkt geeigneter Funktionenräume. Verf. betrachtet gleich kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand. Es werden auch (allgemeine) adjungierte Probleme definiert. Endlichkeit des Indexes der Randwertaufgabe und Stabilität des Indexes bei kleinen Störungen werden bewiesen. Verf. beweist weiterhin die differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben von den Daten des Problems. Kurz skizziert wird auch eine Übertragung des obigen Resultats auf elliptische Systeme.

Zum Schluß möchte der Ref. einige "kritische" Bemerkungen hinzufügen: Diese Publikation wird mit Sicherheit ein Standardwerk werden, so daß bald eine zweite Auflage nötig sein wird. Dann wäre es wünschenswert, beide Indexe zu vervollständigen: z. B. in dem "Index of notations" fehlen die oft benutzten Bezeichnungen: P^α, $\tilde{P}$, R_n^0, $\mathcal{M}(\Omega; \omega, \mu)$, $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_{-\infty}(R_n, R_n; \mu)$. Im "Index": uniqueness of Cauchy problem, continuation of singularities etc. Dem Nichtspezialisten wäre mit kurzen Brückenschlägen zur konventionellen Betrachtungsweise geholfen, z. B. warum der schöne Satz 8.9.1 wirklich Eindeutigkeit des Cauchyproblems ergibt. Doch niemand hat bisher aller Menschen Wünsche befriedigt....

Wir sind dem Verf. jedenfalls zutiefst dankbar, daß er uns dieses Werk geschenkt hat.

Reviewer: Krzysztof Maurin

For a scan of this review see the web version.

MSC:

35-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to partial differential equations

47F05 General theory of partial differential operators (should also be assigned at least one other classification number in Section 47-XX)

Keywords:

linear partial differential equations; linear partial differential operators