Parthasarathy, K. R.

Probability measures on metric spaces. (English) Zbl 0153.19101

Probability and Mathematical Statistics. A Series of Monographs and Textbooks. New York-London: Academic Press. xi, 276 pp. (1967).

Einer der hervorragendsten Wahrscheinlichkeitstheoretiker der indischen Schule liefert mit vorliegender Monographie eine in sich geschlossene und vollständige Behandlung der Theorie der WS-Maße und ihrer Grenzwertsätze auf metrischen Räumen. In der ersten Hälfte des Buches studiert der Verf. insbesondere das Grenzverhalten von Faltungen von WS-Maßen auf lokalkompakten abelschen Gruppen; die zweite Hälfte ist der Betrachtung von WS-Maßen in Hilbert-Räumen gewidmet.

Damit nähert sich der Inhalt des Werkes dem 1963 erschienenen Buch von *U. Grenander*, Probabilities on algebraic structures. Stockholm etc.: Almqvist & Wiksell; New York-London: John Wiley & Sons (1963; Zbl 0131.34804). Während aber Grenander den Überblick über das gesamte Gebiet der WS-Maße auf algebraischen Strukturen (Halbgruppen, kompakten, abelschen und Lie-Gruppen sowie Banach-Räume, Hilbert-Räume und Banach-Algebren) anstrebte (und dies gewiß auf Kosten detaillierten Studiums), werden im vorliegenden Buch hauptsächlich zwei Strukturen in den Mittelpunkt der Diskussion gestellt: die lokalkompakte (oft nur metrische) abelsche Gruppe und der Hilbert-Raum. Die Auswahl der behandelten Fragestellungen ist ferner durch den Forschungsbereich der indischen Schule bestimmt, nämlich durch die Originalarbeiten der Wahrscheinlichkeitstheoretiker *V. S. Varadarajan, R. Ranga Rao, S. R. S. Varadhan* und des Verf. selbst.

Der Text der Monographie ist sehr gut durchgearbeitet und enthält (insbesondere im 2. Teil) eine Auswahl instruktiver Beispiele (vgl. Kapitel VII).

Am Anfang der WS-Theorie auf allgemeinen Strukturen, zu denen als Spezialfall die Gruppe der reellen Zahlen gehört, stehen die Arbeiten zweier bedeutender russischer WS-Theoretiker: *Yu. V. Prokhorov* [Theor. Probab. Appl. 1, 157–214 (1956); translation from Teor. Veroyatn. Primen. 1, 177–238 (1956; Zbl 0075.29001)] und *A. V. Skorokhod* [vgl. etwa *I. I. Gikhman* und *A. V. Skorokhod*, Einführung in die Theorie der Zufallsprozesse. Moskau: Nauka (1965; Zbl 0132.37902)], eine Arbeit und ein Buch, welche insbesondere die Theorie der Grenzverteilungen zu hoher Blüte führten. Diese reflektiert auch in der vorliegenden Monographie.

Kapitel I des Buches beinhaltet das Studium der Borelschen σ-Algebren über metrischen Räumen. Es wird gezeigt, daß in vollständigen metrischen Räumen zwei Borelsche Mengen genau dann isomorph sind, wenn sie die gleiche Kardinalität besitzen (Isomorphie-Theorem). Sodann folgt ein Beweis des berühmten Satzes von Kuratowski über die Meßbarkeit des Inversen einer eineindeutigen meßbaren Abbildung von einer Borelmenge eines vollständigen separablen metrischen Raumes in eine ebensolche. Wichtige Sätze über borelsche Querschnitte (im Sinne von Mackey) beenden das Kapitel.

Kapitel II hat die Betrachtung regulärer, straffer und perfekter Maße auf metrischen Räumen zum Ziel. Es wird die schwache (oder Bernoulli-) Topologie in der Menge $M(X)$ aller WS-Maße über einem metrischen Raum X studiert und gezeigt, daß $M(X)$ ein separabler metrischer Raum genau dann ist, wenn X ein ebensolcher ist. In gleicher Weise charakterisiert man die metrische Kompaktheit und die topologische Vollständigkeit von $M(X)$. Interessant erscheint ferner das Resultat, daß auf jedem überabzählbaren vollständigen separablen metrischen Raum mindestens ein atomloses WS-Maß existiert.

Kapitel III und IV beschäftigen sich mit der Arithmetik der Menge $M(X)$, falls X eine topologische Gruppe ist. Bekanntlich kann man durch Einführung der Faltung $M(X)$ zu einer (sogar topologischen) Halbgruppe machen und etwa idempotente Elemente charakterisieren. Es werden ferner Primelemente in $M(X)$ definiert, und Kategorieeigenschaften für die Gesamtheit dieser bewiesen. Im Spezialfall lokalkompakter abelscher Gruppen X ist die reiche Struktur von $M(X)$ der Ausgangspunkt für eine umfassende Betrachtung der Klasse der unendlich teilbaren WS-Maße auf X , welche in Darstellungssätzen vom Typ Lévy-Khinchin gipfelt. Mit Hilfe der Ergebnisse des Kapitels I wird der Beweis erbracht fur die Verallgemeinerung des bemerkenswerten Satzes von Khinchin uber die Zerlegbarkeit (im Sinne der Faltung) eines WS-Maßes auf X in maximal idempotenten Faktor, abzahlbares Faltungsprodukt von Prim-WS-Maßen und (reinem) unendlich teilbarem WS-Maß.

Wichtigstes Hilfsmittel dieser Theorie ist die Fouriertransformierte eines Maßes (Harmonische Analyse). Nach Darstellung des klassischen (Kolmogorovschen) Fortsetzungssatzes und des Satzes über die Existenz regulärer bedingter WS-Verteilungen auf speziellen (sogenannten Standard-) Borel-Räumen (Kapitel V) beginnt die Behandlung von Grenzwertsätzen für WS-Maße auf Hilbert-Räumen (Kapitel VI). Der klassische Grenzwertsatz für infinitesimale Summanden läßt sich verallgemeinern. Insbesondere überträgt sich das Lindeberg-Lévy Kriterium des zentralen Grenzwertsatzes. An die Stelle der Fouriertransformierten (eines Maßes auf einer abelschen Gruppe) tritt das charakteristische Funktional. Es werden für Hilbert-Räume X die relativkompakten Teilmengen von $M(X)$ beschrieben (§1), ein Satz vom Bochnerschen Typ bewiesen (§2) und ähnliche Fragestellungen wie in Kapitel IV diskutiert.

Hinzu kommt die Behandlung des individuellen und des allgemeinen (funktionalanalytischen) Ergodensatzes für Zufallsvariable mit Werten in einem Banach-Raum. Kapitel VII kann im Sinne einer Anwendung der Theorie des zweiten teils des Buches verstanden werden. Der Verf. studiert WS-Maße auf den Funktionenräumen $C([0,1])$ der stetigen Funktionen und $D([0,1])$ der Funktionen mit ausschließlich Unstetigkeitsstellen 1. Art über dem Intervall $[0,1]$. Für beide Räume X lassen sich die schwachkompakten Teilmengen von $M(X)$ handlich beschreiben. Im Zusammenhang mit $D([0,1])$ werden die Skorokhod-Topologie analysiert und Ergodensätze bewiesen.

Vermöge seiner einheitlichen Form, einer strengen Gliederung und der durchweg lückenlosen Darstellung kann das vorliegende Werk bedenkenlos den bedeutendsten Beiträgen zur Literatur der modernen WS-Theorie hinzugefügt werden.

Reviewer: Herbert Heyer (Tübingen)

For a scan of this review see the web version.

MSC:

60-02	Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to probability theory
01A75	Collected or selected works; reprintings or translations of classics
60B05	Probability measures on topological spaces
60B10	Convergence of probability measures
60B11	Probability theory on linear topological spaces
60B15	Probability measures on groups or semigroups, Fourier transforms, factorization
28A33	Spaces of measures, convergence of measures
28C15	Set functions and measures on topological spaces (regularity of measures, etc.)

Keywords:

probability theory