Hörmander, Lars

Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations. (English) Zbl 0546.35023

Commun. Partial Differ. Equations 8, 21-64 (1983).

Der Verf. knüpft an den folgenden Eindeutigkeitssatz von Aronszajn (1957) und Cordes (1956) an: Wenn $(a_{ij}(x))$ eine reelle, symmetrische, positiv definite $n\times n$ Matrix mit $a_{ij}\in C^2(R^n)$, $u\in H_1^{loc}$ in einer Umgebung von 0 und von unendlicher Ordnung in 0 verschwindet, und für ein $\epsilon>0|\sum a_{ij}(x)D_iD_ju|\le C\sum_{|\alpha|\le l}|x|^{\epsilon+|\alpha|-2}|D^\alpha u|$ gilt, so verschwindet u identisch. Die Voraussetzungen wurden später von Aronszajn (1962) dahingehend abgeschwächt, daß die zweiten Ableitungen der a_{ij} bzw. die a_{ij} selbst nur Lipschitz-stetig zu sein brauchen. Bei Eindeutigkeitsaussagen von Alinhac und Baouendi (1980) werden die a_{ij} reell aus C^∞ und positive Definitheit für $x=0$ angenommen. Wenn $(a_{ij}(0))$ nicht proportional zu einer reellen Matrix und $n>2$ ist, so konnte Alinhac ein $a\in C^\infty$ so konstruieren, daß $\sum a_{ij}(x)D_iD_ju(x)+a(x)u(x)=0$ eine Lösung $u\in C^\infty$ besitzt, die nicht identisch gleich Null ist, jedoch von unendlicher Ordnung in 0 verschwindet.

In der vorliegenden Arbeit werden diese und andere frühere Resultate von Agmon (1966) und Hörmander (1963) verallgemeinert, indem nur Lipschitz-Stetigkeit für die a_{ij} angenommen wird. Mit Hilfe dieser Ergebnisse kann der Verf. auch Eindeutigkeitsaussagen beweisen, indem er das Erfülltsein von L^p-Bedingungen bei den Koeffizienten der Ableitungen niedriger Ordnung fordert. Hierdurch werden bekannte Resultate für $n>3$ verallgemeinert, jedoch die entsprechenden Aussagen für den Laplace-Operator, $n=2,3$, nicht erhalten (Amrein, Berthier, Georgescu 1981). Schließlich werden Eindeutigkeitsaussagen für im Unendlichen schnell abnehmende Lösungen bewiesen und hierbei Resultate von Kato (1959), Agmon (1970) und Simon (1969) wiederentdeckt.

Reviewer: L.Jantscher

MSC:

35J30	Higher-order elliptic equations
35A05	General existence and uniqueness theorems (PDE) (MSC2000)

Keywords:

uniqueness; Lipschitz continuous coefficients

Full Text: DOI

References:

[1] S. Apon, J. Anaiyse Math. 23 pp 1– (1970) · Zbl 0211.40703 · doi:10.1007/BF02795485
[2] A. Apon, Les Presses de l'Univeraité de montreal (1966)
[3] S. Alinhac, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 13 (4) pp 385– (1980)
[4] S. Alinhac, Amer. J. Math. 102 pp 179– (1980) · Zbl 0425.35098 · doi:10.2307/2374175
[5] W.O. Amrein, Ann. Inst. Fourler Grenoble 31 (3) pp 153– (1981) · Zbl 0468.35017 · doi:10.5802/aif.843
[6] N. Aronszajn, J. Math. Fures Appl. 36 pp 235– (1957)
[7] A. Krzywcki, Arb. för Mat. 4 pp 417– (1962) · Zbl 0107.07803 · doi:10.1007/BF02591624
[8] H.O. Cordes, Kachr. Akad. Wiss . Göttingen Math. Phys. Kl. IIa 11 pp 239– (1956)
[9] A. Georgescu, Helv. Phys. Acta 52 pp 655– (1979)
[10] A. Greenleaf, Indiana Univ. Mlath. J. 30 pp 519– (1981) · Zbl 0517.42029 · doi:10.1512/iumj.1981.30.30043
[11] L. Hömander, Springer Verlag, Berlin-Göttingen (1963)
[12] L. Hömander, Scand. 7 pp 177– (1959) · Zbl 0090.08001 · doi:10.7146/math.scand.a-10571
[13] L. Hömander, Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz, (1980)
[14] T. Kato, Comm. Pure. Appl. Math. 12 pp 403– (1959) · Zbl 0091.09502 · doi:10.1002/cpa.3160120302
[15] J. von Memann, Phys. 2 (30) pp 465– (1929)

[16] A. Pli, Bull. Acad. Pol Sci. 11 pp 95– (1963)

[17] M. Reed, IV. Analysis of operators. (1978)

[18] B. Simon, Pure Appl. Math. 22 pp 531– (1969) · Zbl 0167.11003 · doi:10.1002/cpa.3160220405

[19] –, Schrödinger semigroups. To appear in Bull. Amer. Math. soc. · Zbl 0524.35002

[20] P. A. Tomas, Bull, Amer. Math. Soc. 81 pp 477– (1975) · Zbl 0298.42011 · doi:10.1090/S0002-9904-1975-13790-6

[21] F. Treves, Acta Math. 101 pp 1– (1953) · Zbl 0178.50201 · doi:10.1007/BF02559542