Kraft, Hanspeter

Geometrische Methoden in der Invariantentheorie. (German) Zbl 0569.14003

Aspects of Mathematics, D1. Braunschweig-Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn. X, 308 S. (1984).

Während der letzten zwanzig Jahre hat die Invariantentheorie eine Renaissance erlebt. Vor allem die geometrischen Methoden traten in den Vordergrund. Das vorliegende Buch führt in die Theorie der algebraischen Transformationsgruppen ein und bespricht alte und neue Probleme der Invariantentheorie. Dabei werden viele Ergebnisse beschrieben, die bisher nur verstreut in Zeitschriftenartikeln zu finden waren. Durch den Verzicht auf größtmögliche Allgemeinheit (alle Varietäten sind über $\mathbb{C}$ definiert, manche Beweise werden nur für die Gruppe GL(n,$\mathbb{C}$) geführt) gelingt es dem Autor, die wesentlichen Ideen zu vermitteln und den Leser rasch an aktuelle Forschungsgebiete heranzuführen.

Im Kapitel I ("Einführende Beispiele", 44 Seiten) werden Klassifikations- und Normalformenprobleme (Quadratische Formen, Konjugationsklassen, Invarianten mehrerer Vektoren, ternäre kubische Formen) betrachtet und geometrisch interpretiert, um die folgenden Kapitel zu motivieren. - Das Kapitel II ("Gruppenoperationen, Invariantenringe und Quotienten", 97 Seiten) bringt zunächst Grundlagen über affine algebraische Gruppen und deren Darstellungen. Im Hauptteil dieses Kapitels wird bewiesen, daß bei einer regulären Darstellung einer reduktiven Gruppe G die Algebra der invarianten Polynomfunktionen endlich erzeugt ist. Damit können die Invariantenalgebra geometrisch gedeutet und "algebraische Quotienten" nach reduktiven Gruppen gebildet werden. Im Abschnitt 3.4 wird ein Kriterium für Quotienten angegeben, das zusammen mit dem Normalitätskriterium aus Kapitel III, Abschnitt 3.3 eine sehr nützliche und elegante Methode zur Bestimmung von Invariantenalgebren reduktiver Gruppen ergibt. Als Anwendung wird der klassische "1. Fundamentalsatz für GL(n,$\mathbb{C}$)″ in geometrischer Formulierung bewiesen. - Im Kapitel III ("Darstellungstheorie und die Methode der U-Invarianten", 82 Seiten) werden zuerst die wichtigsten Sätze der Darstellungstheorie und das Hilbert-Mumford-Kriterium für GL(n,$\mathbb{C}$) bewiesen und für beliebige reduktive Gruppen formuliert. Dann wird die Methode der U-Invarianten (U ist eine maximale unipotente Untergruppe einer reduktiven Gruppe) behandelt und auf Normalitätsfragen und Multiplizitätenprobleme angewendet. Den Abschluß bildet die Klassifikation aller affinen normalen SL(2,$\mathbb{C}$)-Einbettungen, das sind affine normale SL(2,$\mathbb{C}$)- Varietäten, die eine zu SL(2,$\mathbb{C}$) isomorphe dichte Bahn enthalten.

Im Anhang I ("Einige Grundlagen aus der algebraischen Geometrie", 52 Seiten) sind die zum Verständnis des Buches nötigen Begriffe und Ergebnisse aus der algebraischen Geometrie zusammengestellt. - Im Anhang II ("Lineare Reduktivität der klassischen Gruppen", 10 Seiten) wird mit dem "Weyl'schen unitären Trick" bewiesen, daß die Darstellungen der klassischen Gruppen vollständig reduzibel sind.

Reviewer: F.Pauer

MSC:

14L24	Geometric invariant theory
14L30	Group actions on varieties or schemes (quotients)
14-02	Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to algebraic geometry
20-02	Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to group theory
20G05	Representation theory for linear algebraic groups
15A72	Vector and tensor algebra, theory of invariants
57S25	Groups acting on specific manifolds

Keywords:

algebra of invariant polynomials; algebraic quotients of reductive groups; Hilbert-Mumford group; representation of classical groups