Matzat, B. Heinrich

Konstruktive Galoistheorie. (Constructive Galois theory). (German) Zbl 0634.12011

Lecture Notes in Mathematics, 1284. Berlin etc.: Springer-Verlag. X, 286 p.; DM 42.50 (1987).

Es handelt sich um eine Gesamtdarstellung des heutigen Wissens betreffend das zunächst von Hilbert formulierte Umkehrproblem der Galoistheorie: Ist jede endliche Gruppe als Galoisgruppe einer normalen Erweiterung vom rationalen Zahlkörper $\mathbb{Q}$ realisierbar?

Teilresultate waren schon im letzten Jahrhundert bekannt, z.B. daß jede endliche abelsche Gruppe eine Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ ist, sowie das von Hilbert mittels seines Irreduzibilitätssatzes erzielte Resultat, daß die symmetrischen und die alternierenden Gruppen Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$ sind. Von Shafarevich wurde 1954 bewiesen, daß jede endliche auflösbare Gruppe eine Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ ist. Bei den meisten späteren Ergebnissen ist der Riemannsche Existenzsatz der Schlüsselsatz, der nach sich zieht, daß jede endliche Gruppe über dem Funktionenkörper $\bar{\mathbb{Q}}(T)$ als Galoisgruppe realisierbar ist, wobei $\bar{\mathbb{Q}}$ den Körper aller algebraischen Zahlen bezeichnet. Diejenigen endlichen Gruppen, die bereits Galoisgruppen über $\mathbb{Q}(T)$, bzw. $\mathbb{Q}^{ab}(T)$ sind, sind nach dem Hilbertschen Irreduzibilitätssatz auch über $\mathbb{Q}$, bzw. $\mathbb{Q}^{ab}$, als Galoisgruppen realisierbar. (Hier bezeichnet $\mathbb{Q}^{ab}$ den maximalen abelschen Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$.)

Gruppentheoretische hinreichende Bedingungen für die Realisierbarkeit einer endlichen Gruppe über $\mathbb{Q}(T)$, bzw. $\mathbb{Q}^{ab}(T)$, sind von K. Shih, M. Fried, G. Belyi, J. Thompson und Verf. gegeben. Hierdurch kann gezeigt werden, daß alle klassischen einfachen Gruppen, ein großer Teil der nichtklassischen einfachen Gruppen vom Lie-Typ und alle sporadischen einfachen Gruppen höchstens mit Ausnahme von J_4 als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}^{ab}(T)$ und damit über $\mathbb{Q}^{ab}$ auftreten. Für etliche dieser Gruppen existieren auch Realisierungen über $\mathbb{Q}(T)$ und damit über $\mathbb{Q}$.

Das vorliegende Buch gibt Beweise dieser Ergebnisse, wobei jedoch die in der Lehrbuchliteratur befindlichen Beweise weggelassen sind. Außerdem wird vorgeführt, wie man für diese Gruppen Galoiserweiterungen mit explizit angebbaren erzeugenden Polynomen konstruieren kann. Das Buch ist in einem sorgfältigen und klaren Stil abgefaßt, und diese schöne Gesamtdarstellung von einem sonst recht schwer zugänglichen Gebiet ist sehr zu begrüßen.

Reviewer: C.U.Jensen

MSC:

11R32 Galois theory
12-03 History of field theory
12-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to field theory
20F29 Representations of groups as automorphism groups of algebraic systems
01A60 History of mathematics in the 20th century
20B25 Finite automorphism groups of algebraic, geometric, or combinatorial structures
20B27 Infinite automorphism groups

Keywords:

inverse problem of Galois theory