Gallot, Sylvestre

Inégalités isopérimetriques et analytiques sur les variétes riemanniennes. (Isoperimetric and analytic inequalities on Riemannian manifolds). (French) Zbl 0674.53001

On the geometry of differentiable manifolds, Workshop, Rome/Italy 1986, Astérisque 163-164, 31-91 (1988).

[For the entire collection see Zbl 0666.00013.]

D'après l'introduction de l'auteur: "Au sens strict, établir une inégalité isopérimétrique sur une variété riemannienne donnée (M,g), c'est calculer le minimum de la fonctionnelle qui, à chaque domaine de volume interne fixé, associe le volume (n-1)- dimensionnel de son bord. Sur une variété de volume fini, ceci revient à calculer la fonction $h_{(M,g)}$ définie par

$$h_{(M,g)}(\beta) = Inf\{Vol_g(\partial\Omega)/Vol_g(M): \quad \Omega \subset M \quad tel \quad que \quad Vol_g(\Omega)/Vol_g(M) = \beta\}$$

les volumes étant calculés relativement à la mesure canonique dv_g de M (resp. de $\partial\Omega$) associée à la métrique g.

La section 1, destinée aux analystes non spécialistes de géométrie, se rapporte à la courbure pour comprendre comment elle influe sur les inégalités analytiques et sur la mesure riemannienne. A l'inverse, la section 2 est une présentation (destinée aux géomètres non spécialistes d'analyse) de l'opérateur laplacien et de son spectre. Dans la section 3, l'auteur a tire de ses conversations avec des analystes, de leurs réactions et de l'observation de quelques quiproquos, une liste de difficultés irréductibles que l'on rencontre dès que l'on veut transposer dans un cadre géométrique global des résultats d'analyse qui sont pourtant classiques dans R^n. La section 4 se veut une présentation de méthodes développées par Cheng, Li, Yau, Gromov, Buser pour les majorations (minorations) de valeurs propres: par le principle du min-max, on ramène l'évaluation de $\lambda_i(M,g)$ à celle de la première valeur propre d'une boule géodésique.

Dans la section 5 (d'une inégalité isopérimétrique aux inégalités analytiques), nous établissons un résultat analogue à celui de Faber et Krahn sur les variétés, qui pourrait s'exprimer ainsi: Considérons une fonction donnée h^* et une variété de révolution (M^*,g^*), de pôle x_o, telle que toutes les boules B centrées en x_0 satisfont aux deux hypothèses suivantes: (i) $\mathrm{Vol}(\partial B)/\mathrm{Vol}(M^*) = h^*(\mathrm{Vol}B/\mathrm{Vol}M^*)$, (ii) parmi tous les domaines de M^* de même volume que la boule B, celle-ce a un bord de volume minimal. Alors, sur l'ensemble des variétés (M,g) que vérifient l'inégalité isopérimétrique $h_{(M,g)} \geq h^*$, la fonctionnelle $(M,g) \to \lambda_1(M,g)$ [resp. $(M,g) \to \mathrm{Vol}(M,g) \cdot Sup_{x,y} k_{(M,g)}(t,x,y)$, t=fixé] atteint son minimum (resp. son maximum) en (M^*,g^*). Ensuite, nous présentons les cas où ce théorème reste vrai et devient non vide.

La section 6 (établissement d'inégalités isopérimétriques sur les variétés) établit un certain nombre d'inégalités isopérimétriques et en déduit des estimations du spectre, du noyau de l'opérateur de la chaleur et des constantes qui interviennent dans les inégalités de Sobolev. L'appendice (espace de révolution) fournit les exemples appropriés concernant les théorèmes présentés dans l'ouvrage." Les sections 5 et 6 et l'appendice forment le coeur de l'article parce qu'ils contiennent des énoncés, des preuves et des exemples originaux.

Reviewer: C.Udrişte

MSC:

53-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to differential geometry
53C20 Global Riemannian geometry, including pinching
58J60 Relations of PDEs with special manifold structures (Riemannian, Finsler, etc.)

Keywords:

curvature; comparison theorem; Laplacian; isoperimetric inequalities; spaces of revolution; spectrum;