Berestycki, Henri; Lions, Pierre-Louis

Nonlinear scalar field equations. I: Existence of a ground state. (English) Zbl 0533.35029

Arch. Ration. Mech. Anal. 82, 313-345 (1983).

Es sei $g = g(t)$ eine für $t \in \mathbb{R}$ stetige, reellwertige Funktion mit $g(-t) = -g(t)$. Betrachtet wird das Problem

$$(*) \quad -\Delta u = g(u) \text{ in } \mathbb{R}^N; \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \not\equiv 0.$$

Dabei soll die Funktion g den folgenden zusätzlichen Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} &-\infty < \varliminf_{s\to 0^+} g(s)/s \le \varlimsup_{s\to 0^+} g(s)/s = -m < 0, \\ &-\infty \le \varlimsup_{s\to +\infty} g(s)/s^\ell \le 0, \quad \ell = (N+2)/(N-2), \\ &G(\zeta) = \int_0^\zeta g(s)ds > 0 \quad \text{für ein } \zeta > 0. \end{aligned}$$

Als Hauptresultat der Arbeit wird gezeigt, daß das Differentialgleichungsproblem (*) eine Lösung u besitzt, falls die Bedingungen (1)-(3) mit $N \ge 3$ erfüllt sind. Die Lösung u besitzt die folgenden zusätzlichen Eigenschaften: (a) $u > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. (b) Es gilt $u(x) = \phi(|x|)$ mit einer monoton fallenden Funktion ϕ (r). (c) u(x) gehört zur Klasse $C^2(\mathbb{R}^N)$ und es gilt (4) $|D^\alpha u(x)| \le Ce^{-\delta|x|}$, $x \in \mathbb{R}^N$ für $|\alpha| \le 2$ mit positiven Konstanten C,δ.

Zum Beweis dieser Aussagen wird das Variationsproblem (**) $\quad T(w) \to Minimum, w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $V(w) = 1$, betrachtet, wobei T(w) und V(w) durch die Gleichungen (5) $\quad T(w) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx$ und (6) $\quad V(w) = \int_{\mathbb{R}^N} G(w)dx$ erklärt sind und die Funktion g geeignet zu modifizieren ist. Es wird gezeigt, daß (**) eine positive, radialsymmetrische, in $r = |x|$ monoton fallende Lösung $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ besitzt und ein positiver Lagrange-Multiplikator Θ existiert, so daß (7) $\quad -\Delta v = \Theta g(v), x \in \mathbb{R}^N$ gilt. Die Funktion $u(x) = v(x/\Theta)$ ist dann eine Lösung von (*). Unter Anwendung der Pokozaevschen Identität ergibt sich für eine beliebige Lösung z von (*) die Ungleichung (8) $\quad 0 < S(u) \le S(z)$, wobei das Funktional S(z) durch die Gleichung (9) $\quad S(z) = (1/2)T(z) - V(z)$ definiert ist.

Reviewer: E.Heinz

MSC:

35J60	Nonlinear elliptic equations
35J15	Second-order elliptic equations
35A15	Variational methods applied to PDEs
35A05	General existence and uniqueness theorems (PDE) (MSC2000)

Keywords:

nonlinear scalar field equations; existence; ground state; semi-linear elliptic equations; Klein-Gordon equation

Full Text: DOI