Lang, Serge

Introduction to complex hyperbolic spaces. (English) Zbl 0628.32001

New York etc.: Springer-Verlag. viii, 271 p. (1987).

Analytische Teilmengen eines komplexen Raumes lassen sich über niedrigerdimensionale Hindernisse zu analytischen Mengen fortsetzen. Dem entspricht als Spezialfall die Möglichkeit der Fortsetzung holomorpher (meromorpher) Abbildungen über niedrigerdimensionale Hindernisse hinweg. Im Falle höherdimensionaler Hindernisse kann das Verhalten der Mengen bzw. Abbildungen in der Nähe der Hindernisse sehr wild sein, es sei denn, man hat zusätzliche Informationen über den Raum oder über die fortzusetzende analytische Menge (z.B. endliches Volumen); im Falle von Abbildungen leisten gewisse Eigenschaften der Hyperbolizität des Bildraumes das Gewünschte: Das Streuen von analytischen Mengen, vor allem von Abbildungen in der Nähe von Hindernissen heißt „Wertverteilung“. Die Hyperbolizität des Bildraumes garantiert dabei oft einigermaßen „übersichtliches“ Verhalten in der Nähe der Hindernisse. Der Kern unterschiedlicher Definitionen der Hyperbolizität liegt in der Eigenschaft, daß holomorphe Abbildungen in „hyperbolische“ Räume abstandsverkürzend sind. Das ermöglicht z.B. die Anwendung des Satzes von Ascoli.

Den klassischen Fall der Dimension 1 beschreibt die sogenannte Wertverteilungslehre von Nevanlinna mit ihren zwei Hauptsätzen.

Im vorliegenden Band geht es um Abbildungen (bzw. Familien von Abbildungen) der Art $M \setminus A \to X \subset Y$ und deren Verhalten in der Nähe von $A \times \bar{X} \cup M \times (\bar{X} \setminus X)$. Klassischer Spezialfall: $M = D \subset \mathbb{C}^1$ Kreisscheibe oder $M = \mathbb{C}^1$, $A = \{0\}$, oder $\emptyset$, $X \subset \mathbb{C}$, $Y = \mathbb{P}^1$ (Nevanlinnasche Wertverteilung, Picard's Satz). Die Verallgemeinerungen betreffen vor allem folgende Situationen: M wie oben, $Y = \mathbb{P}^n$, $Y \setminus X$ gewisse Hyperebenenkonstellationen. Die hierher gehörenden Resultate sind oft klassisch (H. Cartan's Dissertation, A. Bloch) und fußen u.a. auf verallgemeinerten Nevanlinnaschen Hauptsätzen (H. Cartan's Dissertation, A. Bloch's Arbeit, $\sim$ 1926), bzw. auf noch älteren Sätzen (E. Borel, $\sim$ 1887). Der Autor stellt Klassisches in den Kontext neuer Sichtweisen, Resultate und Techniken (von Fujimoto, Green, Kiernan-Kobayashi u.a.), und führt in seiner neuen Aufarbeitung Klassisches und Neueres ein kleines Stück weiter.

1) Auf diesem Weg fallen mehr offene als gelöste Probleme ab, die sorgfältig aufgelistet werden. Das Buch möchte so interessante weitere Forschungsarbeit in aussichtsreichen Richtungen anregen und das Interesse an einer klassischen Arbeit wie der von H. Cartan neu wecken (als Ausgang zu den noch ausstehenden Verallgemeinerungen des 2. Hauptsatzes von Nevanlinna) samt den für manche Zweige wichtigen Konsequenzen.

2) Der Autor hat hier die Diophantische Geometrie im Auge (Fermat, Mordell). Wo immer möglich, versucht er Parallelen/Analogien der hyperbolischen Analysis zu gewissen Teilen der algebraischen Geometrie herzustellen (z.B. seine Vermutung: Hyperbolisch $\sim$ Endlichkeit rationaler Punkte). Er bedauert zurecht, daß aus gegenseitigem Nichtverstehen heraus (analytisch-geometrisch $\sim$ algebraisch) verwandte Formeln oft zig Jahre unverstanden nebeneinander standen (Cartan $\sim$ Weil, Artin$\sim$ Hecke).

3) Zentral für diesen Band ist die Kobayashi-Hyperbolizität, die aus Gründen der Anwendung mit einigen weiteren verglichen wird (z.B. Brody-Hyperbolizität). Insbesondere die differentialgeometrische Sicht wird betont. Außer in einer Kapitelüberschrift vermeidet der Autor das im Komplexen verbreitete pseudodifferentialgeometrische Reden (von Krümmung z.B.), das er für eher irreleitend hält. Zu begrüßen wäre, würden sich solche Umpolungen durchsetzen (der Autor ist sich da nicht sicher).

Das Buch ist klar geschrieben, i.w. selfcontained; auch Teile sind getrennt für sich lesbar. Zur Einführung, vor allem auch zur Anregung für einen gewissen Forschungsbereich, sollte es manchen Interessenten finden.

Reviewer: Karlheinz Spallek (Münster)

MSC:

- 32Q45 Hyperbolic and Kobayashi hyperbolic manifolds
- 32-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to several complex variables and analytic spaces
- 32-01 Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to several complex variables and analytic spaces
- 32H30 Value distribution theory in higher dimensions
- 32J25 Transcendental methods of algebraic geometry (complex-analytic aspects)
- 30D35 Value distribution of meromorphic functions of one complex variable, Nevanlinna theory
- 14A10 Varieties and morphisms
- 53C55 Global differential geometry of Hermitian and Kählerian manifolds

Keywords:

complex hyperbolic spaces; value distribution; Kählerian; divisor; algebraic variety; diophantine geometry; Picard; Nevanlinna