zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

**Wegert, Elias**

**Nonlinear boundary value problems for holomorphic functions and singular integral equations.** (English) Zbl 0745.30040

Mathematical Research. 65. Berlin: Akademie Verlag. 240 p. (1992).

In der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts wurde es üblich, zum Zwecke der Habilitation eigene Schriften vorzulegen, die bald den Charakter von Monographien annahmen, die allerdings nur in einigen Fällen auch als solche publiziert wurden. Eine der berühmtesten ist die von Riemann aus dem Jahre 1854. Erst als während des zweiten Weltkrieges der wissenschaftliche Nachwuchs in Deutschland selten wurde, ging man von dieser Regel ab und begnügte sich mit vorgelegten Publikationen. In unseren Tagen ist diese kumulative Habilitation, durch die Universitätsreformen wieder hervorgeholt, in vielen Habilitationsordnungen als eine Möglichkeit verankert. In der DDR hatte man dagegen, obwohl die Habilitation — nach russischem Vorbild — durch die Dissertation $B$ ersetzt war, an der Forderung nach der Vorlage einer monographieähnlichen Schrift festgehalten.

Das vorliegende Buch ist die ausgearbeitete und wesentlich erweiterte Fassung der Dissertation $B$-Schrift des Verfassers von 1988 an der Bergakademie Freiberg. Sein Gegenstand, das nichtlineare Riemann-Hilbertsche Randwertproblem für analytische Funktionen, wird mit Hilfe einer topologischen Methode, wie sie A. I. Shnirel'man zuerst angewandt hat, und dem Leray-Schauderschen Fixpunkt Index oder Abbildungsgrad behandelt. Der klassischen analytischen Formulierung

$$F(\zeta, \operatorname{Re} w(\zeta), \operatorname{Im} w(\zeta)) = 0, \qquad \zeta \in \Gamma,$$

wird folgende geometrische Formulierung der Vorzug gegeben:

$$w(\zeta) \in M_\zeta, \qquad \zeta \in \Gamma.$$

Hier ist $\{M_\zeta :\ \zeta \in \Gamma\}$ eine gegebene Familie von Kurven in der komplexen Ebene. Es werden an Hand verschiedenartiger Parametrisierungen von $M := \bigcup_{\zeta\in\Gamma}\{\zeta\}\times M_\zeta$ drei Fälle unterschieden, für die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen sowie Regularitätssätze gewonnen werden (Kapitel 2). Selbstverständlich läßt sich der Riemannsche Abbildungssatz hier wiederfinden. Die Untersuchung der Menge

$$A(M) := \{w \in H^\infty :\ w(\zeta) \in \text{clos int } M_\zeta \text{ a.e. on } \Gamma\}$$

führt zu Extremalproblemen (Kapitel 3), die z.B. Aussagen über gewisse Interpolationsprobleme liefern. Das entwickelte Extremalprinzip verallgemeinert das klassische Maximumprinzip und läßt klassische Extremalprobleme der konformen Abbildung oder das Schwarz-Picksche Lemma in neuem Licht erscheinen. Abhängigkeit der Lösungen von Parametern bei parameterabhängigen Randwertproblemen im Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Verhalten der Indikatrix wird (Kapitel 4) erläutert.

Das Interesse an dem Riemann-Hilbert Problem rührt auch von seiner Verbindung zu singulären Integralgleichungen her. Für den in diesem Werk im Mittelpunkt der Betrachtung stehenden Fall des Einheitskreises sind dies Hammersteinsche Integralgleichungen $H$ mit Hilbertschen Cotangenskern und implizite Gleichungen der Art $F(\zeta, Hv(\zeta), v(\zeta)) = 0$ für $|\zeta| = 1$. Im Fall, wo Parameter in der nichtlinearen Integralgleichung vorkommen, treten Verzweigungsprobleme auf. Probleme und Methoden dieses Abschnitts (Kapitel 5) stehen wiederum stets in Verbindung mit dem Riemann-Hilbert Problem.

An Anwendungen (Kapitel 6) werden betrachtet das Heltonsche Optimierungsproblem der Kontrolltheorie, Optimierungsproblem unter zusätzlichen Interpolationsbedingungen, die polynomiale Hülle

$$\text{pol } K := \{z \in \mathbb{C}^n :\ |p(z)| \le \max_{\zeta\in K} |p(\zeta)| \text{ für alle Polynome } p\}$$

einer kompakten Menge $K$ von $\mathbb{C}^n$, und Potentialströmungen um einen Zylinder mit poröser Oberfläche. Das letztgenannte Problem ist in der Freiberger Gruppe von L. von Wolfersdorf ausführlich und mit unterschiedlichen Ansätzen wiederholt attackiert worden.

In praktischer Anwendung des Riemann-Hilbert Problems werden (Kapitel 7) numerische Methoden


© 2021 FIZ Karlsruhe GmbH

herangezogen, die auf der Grundlage der Linearisierung der Randbedingung in Newton-Iterationen bestehen. Es werden zwei Algorithmen angegeben, einer für den Fall, daß $M$ in Parameterdarstellung gegeben ist, ein anderer, wo $M$ durch eine Gleichung festgelegt wird. Unter geeigneten Voraussetzungen wird lokal quadratische Konvergenz gegen die Lösung erzielt. Auch parameterabhängige Probleme werden approximativ gelöst. Außerdem wird erläutert, wie die Methoden in den Computer implementiert werden können. Diskretisierung der Randkurve führt zu diskreten Riemann- Hilbert Problemen (Kapitel 8). Im linearen Fall wird die Lösbarkeit für hinreichend kleine Maschenweite und die Konvergenz der Lösungen gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems mit optimaler Konvergenzordnung auf Grund von a-priori Abschätzungen behandelt. Nichtlineare Probleme werden auf iterative Weise gelöst und wiederum auch parameterabhängige Probleme studiert. Schließlich werden Computerimplementierungen und Testergebnisse kommentiert.

Diese Monographie ist schon für Studenten mittlerer Semester mit funktionentheoretischen und funktionalanalytischen Grundkenntnissen verständlich. Sie eignet sich sowohl zum Selbststudium als auch als Grundlage für weiterführende Vorlesungen der Funktionentheorie und für Seminare. Dem Verfasser ist es auch gelungen, den Stoff so anzuordnen, daß man, an bestimmten Fragestellungen interessiert, nur die dafür relevanten Vorkapitel und nicht den gesamten Vortext lesen muß.

Ein interessantes, ein ergiebiges, ein sehr empfehlenswertes Buch.

Reviewer: H.Begehr (Berlin)

**MSC:**

| | |
|---|---|
| 30E25 | Boundary value problems in the complex plane |
| 45E05 | Integral equations with kernels of Cauchy type |
| 30C70 | Extremal problems for conformal and quasiconformal mappings, variational methods |
| 30-01 | Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to functions of a complex variable |
| 45-01 | Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to integral equations |

Cited in **2** Reviews
Cited in **28** Documents

**Keywords:**

nonlinear Riemann-Hilbert problem; existence; Leray-Schauder fixed-point index; uniqueness; regularity; Riemann mapping theorem; extremal problem; singular integral equation; Helton optimization; Hammerstein integral equation; potential flow; algorithms; computer implementation


© 2021 FIZ Karlsruhe GmbH