Coste, Michel; Ruiz, Jesús M.; Shiota, Masahiro

Separation, factorization and finite sheaves on Nash manifolds. (English) Zbl 0885.14029

Compos. Math. 103, No. 1, 31-62 (1996).

Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine Nash-Mannigfaltigkeit. Mit $\mathcal{N}$ wird die Garbe der Nash-Funktionen auf M und mit $\mathcal{O}$ die Garbe der analytischen Funktionen auf M bezeichnet. $\mathcal{N}$ ist eine kohärente Garbe von $\mathcal{N}$-Moduln. Deshalb ist eine kohärente $\mathcal{N}$-Idealgarbe bereits kohärent, wenn sie lokal endlich erzeugt ist. Aber die Klasse der kohärenten Idealgarbe ist in der Theorie der Nash-Funktionen zu groß. Es ist sinnvoll, die kleinere Klasse der sogenannten endlichen $\mathcal{N}$-Idealgarben zu betrachten. In der vorliegenden Arbeit geht es um folgende Probleme:

Das Separationsproblem: Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{N}(M)$. Ist $\mathfrak{p}\mathcal{O}(M)$ ein Primideal von $\mathcal{O}(M)$? – $\mathrm{Sep}(M)$ bedeute, daß das Separationsproblem für alle Primideale eine positive Antwort hat. $\mathrm{Sep}_1(M)$ bedeute die Gültigkeit für Primideale der Höhe 1.

Das Faktorisierungsproblem: Sei $f \in \mathcal{N}(M)$ und sei $f = f_1 f_2$ mit $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(M)$. Gibt es $g_1, g_2 \in \mathcal{N}(M)$ und positive Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{O}(M)$, derart daß $\varphi_1, \varphi_2 = 1$, $f_1 = \varphi_1 g_1$, $f_2 = \varphi_2 g_2$? – Bei positiver Antwort für alle $f \in \mathcal{N}(M)$ notieren wir $\mathrm{Fact}(M)$.

Das Problem der globalen Erzeugbarkeit: Sei I eine endliche $\mathcal{N}$-Idealgarbe. Ist I durch globale Nash-Funktionen erzeugbar? – Gilt dies für alle endlichen Idealgarben, schreiben wir $\mathrm{Glob}(M)$. Gilt es für endliche Hauptidealgarben, so notieren wir $\mathrm{Glob}_1(M)$. Schränken wir die Betrachtung auf Garben von Radikalidealen ein, benutzen wir den oberen Index r, also $\mathrm{Glob}^r(M)$ oder $\mathrm{Glob}_1^r(M)$.

Das Fortsetzungsproblem: Sei I eine endliche $\mathcal{N}$-Idealgarbe. Ist der natürliche Homomorphismus $\mathcal{H}^0(M, \mathcal{N}) \to \mathcal{H}^0(M, \mathcal{N}/I)$ surjektiv? – Bei Gültigkeit schreiben wir analog zum obigen Problem $\mathrm{Ext}(M)$, $\mathrm{Ext}_1(M)$, $\mathrm{Ext}^r(M)$, $\mathrm{Ext}_1^r(M)$.

Die Autoren beweisen die folgenden Theoreme:

Theorem 1: Die Eigenschaften $\mathrm{Sep}(M)$, $\mathrm{Glob}^r(M)$, $\mathrm{Glob}(M)$, $\mathrm{Ext}^r(M)$, $\mathrm{Ext}(M)$ sind äquivalent.

Theorem 2: Die Eigenschaften $\mathrm{Fact}(M)$, $\mathrm{Sep}_1(M)$, $\mathrm{Glob}_1^r(M)$, $\mathrm{Glob}_1(M)$, $\mathrm{Exp}_1^r(M)$, $\mathrm{Ext}_1(M)$ sind äquivalent.

In einem abschließenden Abschnitt werden über die Äquivalenzaussagen hinaus einige positive Antworten zu den Problemen gegeben.

Reviewer: H.-J.Reiffen (Osnabrück)

MSC:

14P20	Nash functions and manifolds
58A07	Real-analytic and Nash manifolds
32C07	Real-analytic sets, complex Nash functions

Keywords:

Nash functions; Nash manifolds

Full Text: Numdam EuDML

References:

[1] D'Angelo, J. : Orders of contact of real and complex subvarieties , Illinois J. Math. 26 (1982) 41-51. · Zbl 0459.32006

[2] Artin, M. : Algebraic approximation of structures over complete local rings , Publ. Math. I.H.E.S. 36 (1969) 23-58. · Zbl 0181.48802 · doi:10.1007/BF02684596

[3] Benedetti, R. and Tognoli, A. : On real algebraic vector bundles , Bull. Sc. Math. 104 (1980) 89-102. · Zbl 0421.58001

[4] Beretta, L. and Tognoli, A. : Nash sets and global equations , Bolletino U.M.I. (7) 4-A (1990) 31-44. · Zbl 0735.14037

[5] Bochnak, J. , Coste, M. and Roy, M-F. : Géométrie algébrique réelle , Springer 1987. · Zbl 0633.14016

[6] Coste, M. , Ruiz, J.M. and Shiota, M. : Approximation in compact Nash manifolds , Amer. J. Math. 117 (1995) 1-23. · Zbl 0873.32007 · doi:10.2307/2374953

[7] Efroymson, G. : Nash rings in planar domains , Trans. Amer. Math. Soc. 249 (1979) 435-445. · Zbl 0426.14024 · doi:10.2307/1998801

[8] Efroymson, G. : The extension theorem for Nash functions , in: Géométrie algébrique réelle et formes quadratiques , 343-357, Lecture Notes in Math. 959, Springer 1982. · Zbl 0516.14020

[9] El Khadiri, A. and Tougeron, J-C. : Familles noethériennes de modules sur k[[X]] et applications, to ap pear in Bull. Sc. Math. · Zbl 0858.13009

[10] Fortuna, E. , Lojasiewicz, S. and Raimondo, M. : Algebricité de germes analytiques , J. reine angew. Math. 374 (1987) 208-213. · Zbl 0599.32004

[11] Gunning, R.C. and Rossi, H. : Analytic functions of several complex variables , Prentice-Hall 1965. · Zbl 0141.08601

[12] Hubbard, J. : On the cohomology of Nash sheaves , Topology 11 (1972) 265-270. · Zbl 0238.55010 · doi:10.1016/0040-9383(72)90013-4

[13] Huber, R. : Isoalgebraische Räume , thesis, Regensburg 1984.

[14] Knebusch, M. : Isoalgebraic geometry: first steps, in: Sém . Delange-Pisot-Poitou (1980-81) 215-220Progress in Math. 22, Birkhäuser 1982. · Zbl 0518.14016

[15] Mora, F. and Raimondo, M. : Sulla fattorizzazzione analitica delle funzioni di Nash , Le Matematiche 37 (1982) 251-256. · Zbl 0631.14020

[16] Mostowski, T. : Some properties of the ring of Nash functions , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 3 (1976) 245-266. · Zbl 0335.14001

[17] Pecker, D. : On Efroymson's extension theorem for Nash functions , J. Pure Appl. Algebra 37 (1985) 193-203. · Zbl 0581.14016 · doi:10.1016/0022-4049(85)90097-0

[18] Quarez, R. : The idempotency of the real spectrum implies the extension theorem for Nash functions , preprint, Rennes 1994. · Zbl 0904.14031 · doi:10.1007/PL00004395

[19] Ruiz, J.M. and Shiota, M. : On global Nash functions , Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 27 (1994) 103-124. · Zbl 0805.14027 · doi:10.24033/asens.1690

[20] Shiota, M. : On the unique factorization of the ring of Nash functions , Publ. RIMS Kyoto Univ. 17 (1981) 363-369. · Zbl 0503.58001 · doi:10.2977/prims/1195185261

[21] Shiota, M. : Nash manifolds , Lecture Notes in Math. 1269, Springer 1987. · Zbl 0629.58002

[22] Shiota, M. : Extension et factorisation de fonctions de Nash C\infty , C. R. Acad. Sci. Paris 308 (1989) 253-256. · Zbl 0681.32006

[23] Thom, R. : Quelques propriétés globales des variétés différentiables , Comment. Math. Helv. 28 (1954) 17-86. · Zbl 0057.15502 · doi:10.1007/BF02566923

[24] Tancredi, A. and Tognoli, A. : On the extension of Nash functions , Math. Ann. 288 (1990) 595-604. · Zbl 0699.32006 · doi:10.1007/BF01444552

[25] Tognoli, A. : Algebraic geometry and Nash functions , Institutiones Math. 3, Academic Press 1978. · Zbl 0418.14002

[26] Whitney, H. and Bruhat, F. : Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels , Comment. Math. Helvet. 33 (1959) 132-160. · Zbl 0100.08101 · doi:10.1007/BF02565913