Ćirić, L.

Common fixed points of nonlinear contractions. (English) Zbl 0918.47045

Acta Math. Hung. 80, No. 1-2, 31-38 (1998).

In der vorliegenden Arbeit werden Paare von Selbstabbildungen eines vollständigen metrischen Raumes betrachtet und hinreichende Bedingungen vom Kontraktionstyp angegeben, die die Existenz und Unität eines gemeinsamen Fixpunktes sichern. Ist Φ die Menge aller Funktionen $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, die rechtsseitig stetig sowie nicht fallend sind und der Bedingung $\varphi(t) < t$ für alle $t > 0$ genügen, so lautet das Hauptergebnis der Arbeit (Th. 2.1.):

"Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und S, T seien Selbstabbildungen von X, die der folgenden Kontraktionsbedingung genügen:

$$d(S(T(x)), T(S(y))) \\ \leq \mathrm{Max}\{\varphi_1(1/2(d(x, S(y)) + d(y, T(x)))), \varphi_2(d(x, T(x))), \varphi_3(d(y, S(y))), \varphi_4(d(x, y))\}$$

für alle x, y aus X und gewisse $\varphi_k \in \Phi$ für $k = 1, 2, 3, 4$. Ist eine der beiden Abbildungen S, T stetig, so haben S und T genau einen gemeinsamen Fixpunkt (es gibt genau ein p in X mit $T(p) = S(p) = p$)."

Der Beweis beruht auf der sorgfältigen Untersuchung der "Wechseliterationsfolge" $(x_n) : x_0 \in X$ sei gegeben, dann sei $x_1 = T(x_0)$, $x_2 = S(x_1)$, $x_3 = T(x_2)$, $x_4 = S(x_3), \ldots$; von der die Cauchyfolgen-Eigenschaft nachgewiesen wird. Der bewiesene Satz verallgemeinert ein einschlägiges Resultat von *B. Fisher* [Acta Math. Acad. Sci. Hung. 34, 289-292 (1979; Zbl 0417.54018)] und ist sicher geeignet für weitere Anwendungen von Fixpunktsätzen auf Operatorgleichungen.

Reviewer: Thomas Riedrich (Dresden)

MSC:

47H10 Fixed-point theorems
47J25 Iterative procedures involving nonlinear operators

Keywords:

contraction conditions; common fixed points

Full Text: DOI